

Nivelación de Matemáticas para Ingeniería



Universidad
Tecnológica
del Perú

¿A que será igual
Seno de 83° ?

¿A que será igual
Coseno de 105° ?

¿A que será igual
Seno de 14° ?

¿A que será igual
Coseno de 23° ?

¡Los ángulos de 83° ,
 105° , 14° y 22° no son
notables;

¡Pero tenemos: 30° , 60° ,
 45° , 37° , 53° , 16° y 74°
que si son notables;

Podemos obtener el ángulo de 83° , 105° ,
 14° y 23° en función a los ángulos
notables antes mencionados, por
ejemplo:

$$83^\circ = 30^\circ + 53^\circ, \text{ por lo tanto: } \text{Sen } 83^\circ = \text{Sen } (30^\circ + 53^\circ)$$

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ, \text{ por lo tanto: } \text{Cos } 105^\circ = \text{Cos } (60^\circ + 45^\circ)$$

$$14^\circ = 30^\circ - 16^\circ, \text{ por lo tanto: } \text{Sen } 14^\circ = \text{Sen } (30^\circ - 16^\circ)$$

$$23^\circ = 76^\circ - 53^\circ, \text{ por lo tanto: } \text{Cos } 23^\circ = \text{Cos } (76^\circ - 53^\circ)$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS



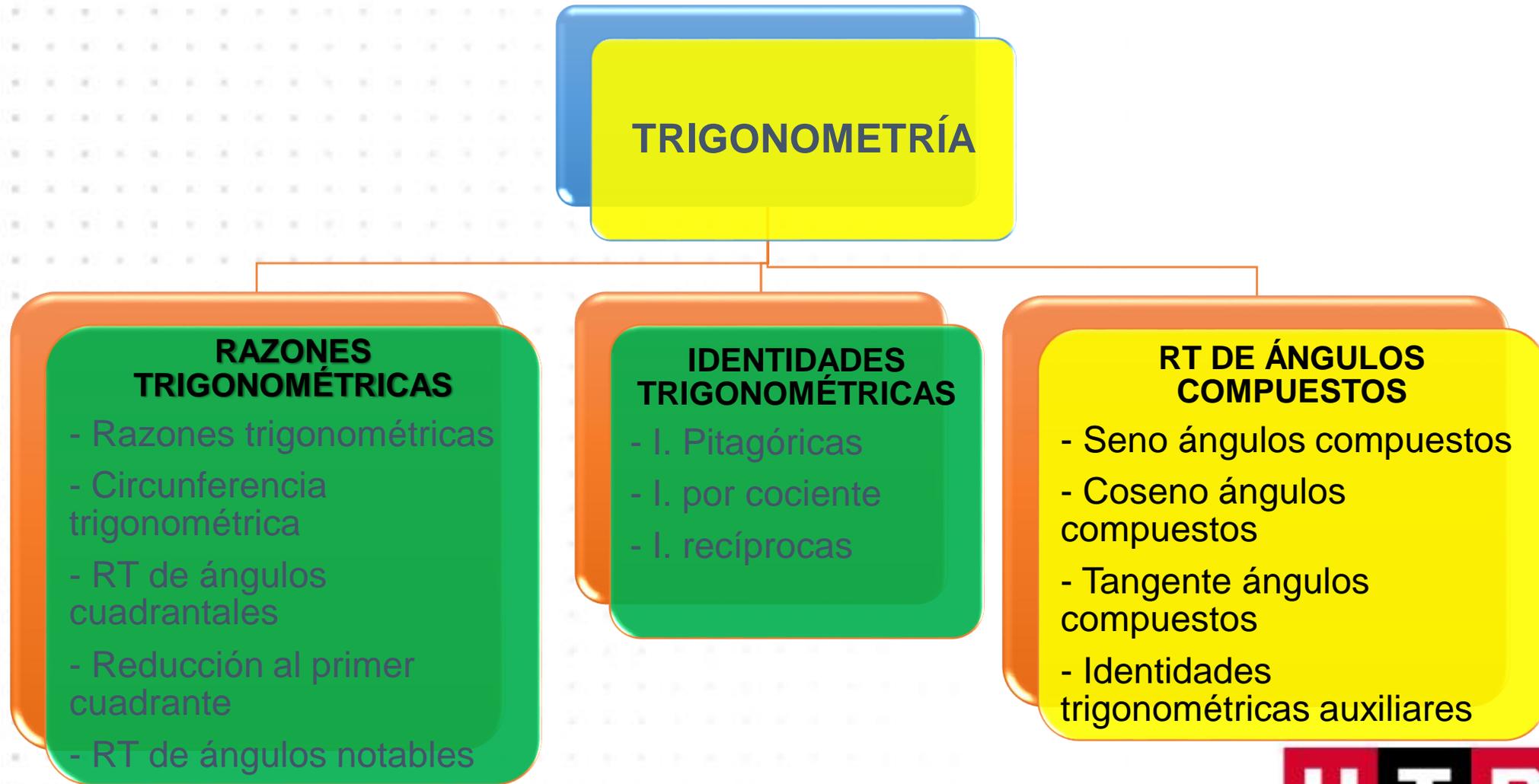
Universidad
Tecnológica
del Perú

LOGRO DE LA SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante simplifica expresiones utilizando las razones trigonométricas de ángulos compuestos y las aplica a soluciones de problemas con autonomía y seguridad.



ESQUEMA DE LA UNIDAD



Identidades trigonométricas

Una **Identidad Trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen **funciones trigonométricas** y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (y las operaciones aritméticas involucradas).

Seno de la suma o diferencia de dos ángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}69^\circ &= \operatorname{sen}(16^\circ + 53^\circ) \\ &= \operatorname{sen}16^\circ\cos53^\circ + \cos16^\circ\operatorname{sen}53^\circ \\ &= \frac{7}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{117}{125} \end{aligned}$$

Coseno de la suma o diferencia de dos ángulos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \cos 23^\circ &= \cos(53^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 53^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 53^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} + 4}{10} \end{aligned}$$

Tangente de la suma o diferencia de dos ángulos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Ejemplo:

$$\tan 8^\circ = \tan(45^\circ - 37^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 37^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 37^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + 1 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$$

Identidades trigonométricas del ángulo doble

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$$

$$\text{cos}(2\alpha) = \text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{tan}(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Identidades trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tan} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Ejercicios explicativos

1. Hallar:

$$\text{Sen } 15^\circ$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{sen}15^\circ &= \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \text{sen}45^\circ\text{cos}30^\circ - \text{cos}45^\circ\text{sen}30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Ejercicios explicativos

2. Hallar $\text{Cos } 8^\circ$

Solución

$$\begin{aligned}\text{Cos } 8^\circ &= \text{sen}(45^\circ - 37^\circ) \\ &= \text{cos}45^\circ\text{cos}30^\circ + \text{sen } 45^\circ\text{sen}30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3}{5} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

Ejercicios explicativos

3. Hallar $\tan 75^\circ$

Solución

$$\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$



Ejercicio

1. Si $\text{sen}(37^\circ + x) = 2 \cos(60^\circ + x)$, calcule $\tan x$

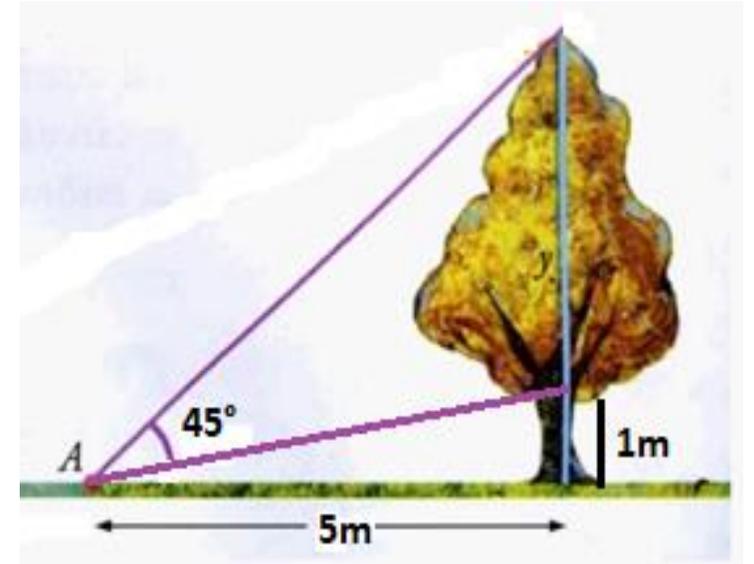
Ejercicio

2. Reduzca la siguiente expresión:

$$\frac{\cos(x + y) + \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y}{\operatorname{cos}x \cdot \operatorname{cos}y}$$

Ejercicio

3. Calcula la altura del árbol con los datos de la figura:



Gracias