Nivelación de Matemáticas para Ingeniería

Universidad Tecnológica del Perú

CÓNICAS II: ELIPSE E HIPERBOLA

Universidad Tecnológica del Perú

¿Que forma tienen las Figuras que se aprecian mas en las siguientes fotos?

Universidad Tecnológica del Perú

Puente hiperbólico de Manchester

Torre de control del Aeropuerto de Barcelona

La Torre de Kobe

UTP Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE LA SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el alumno resuelve problemas con autonomía y seguridad, cuya solución requiera del uso de propiedades de elipse e hipérbola.

Esquema de la unidad

CÓNICAS

CÓNICAS I:

-Circunferencia

-Parábola

CÓNICAS II:

Elipse

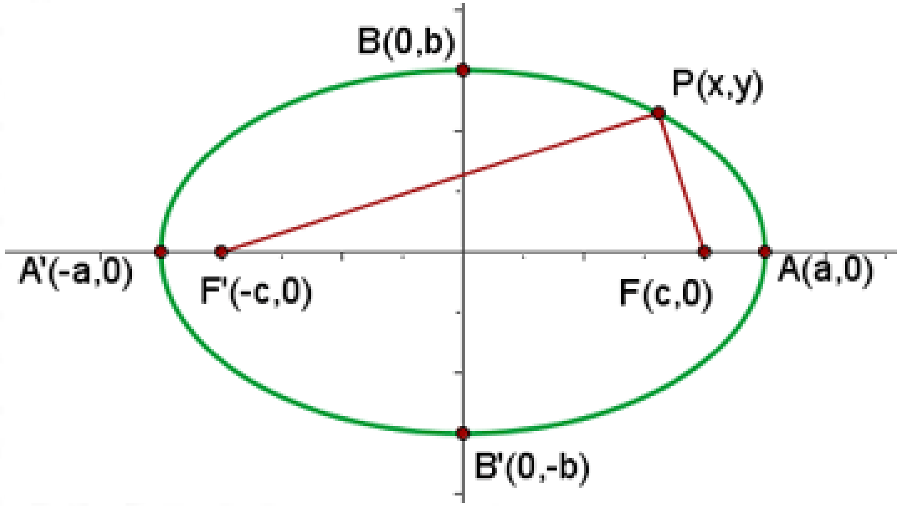
Hipérbola

La elipse

DEFINICIÓN:

Una elipse es el conjunto de puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $\boldsymbol{2a}$.

$$\overline{PF} + \overline{PF}' = 2a = k$$



La elipse - elementos

FOCOS: $F \ y \ F'$

CENTRO DE LA ELIPSE: O

VÉRTICES: $A \ y \ A'$

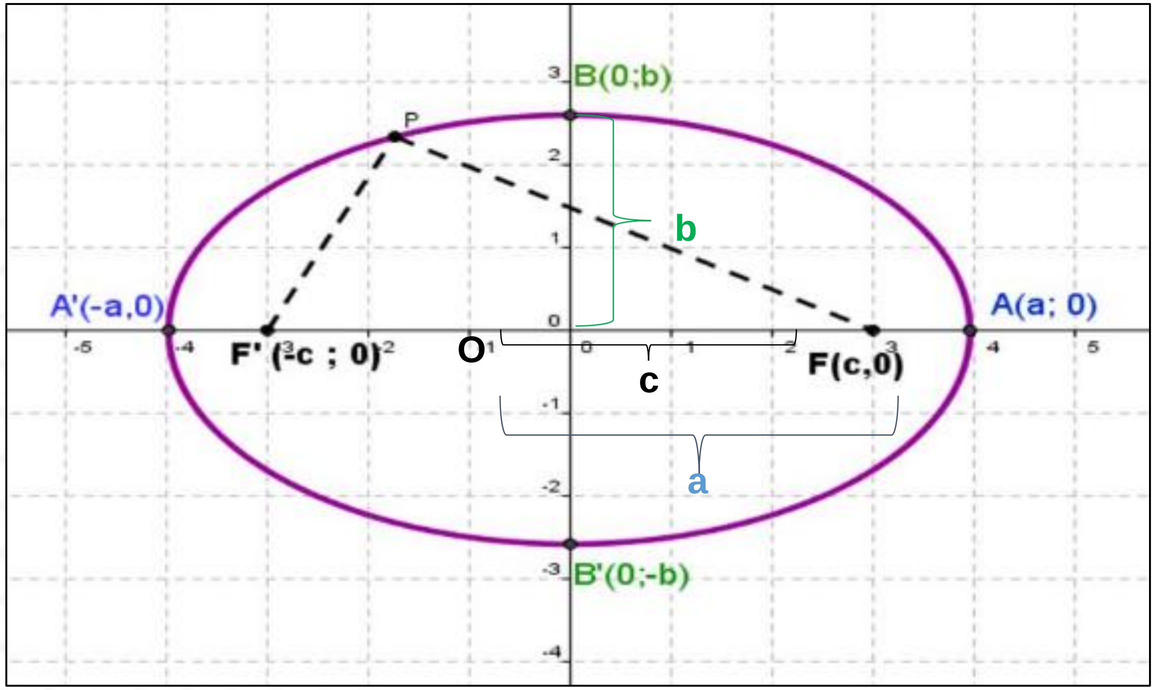
SEMIEJE MAYOR: $OA = OA' = a$

SEMIEJE MENOR: $OB = OB' = b$

SEMIDISTANCIA FOCAL:

$$OF = OF' = c$$

Se cumple: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

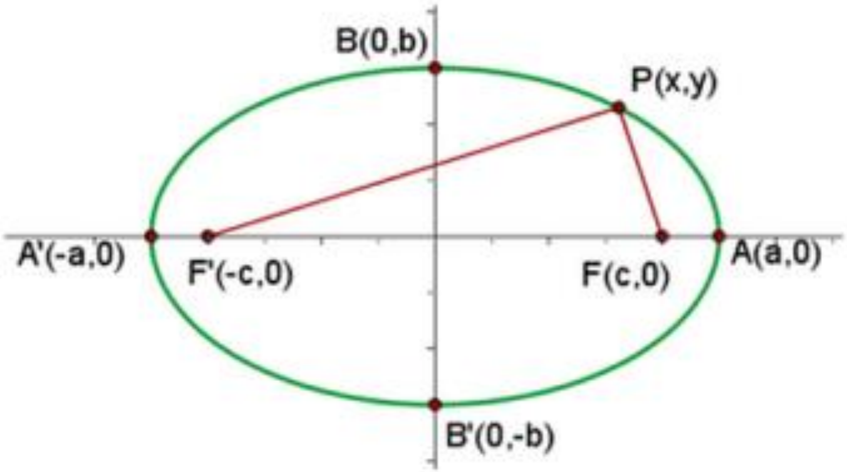


Universidad Tecnológica del Perú

Ecuación canónica de la elipse

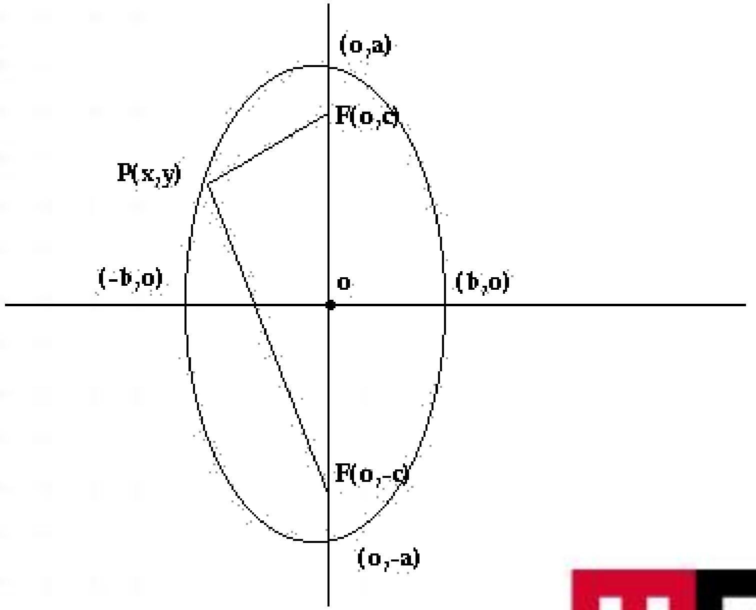
1) Centro en el Origen y eje Focal en el eje x ; su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



2) Centro en el Origen y eje Focal en el eje y su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

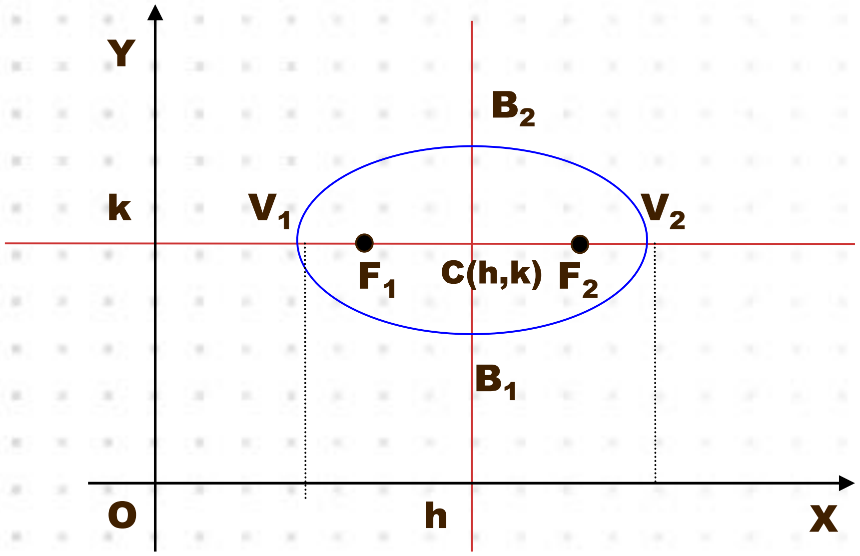


Universidad Tecnológica del Perú

Ecuación ordinaria de la elipse

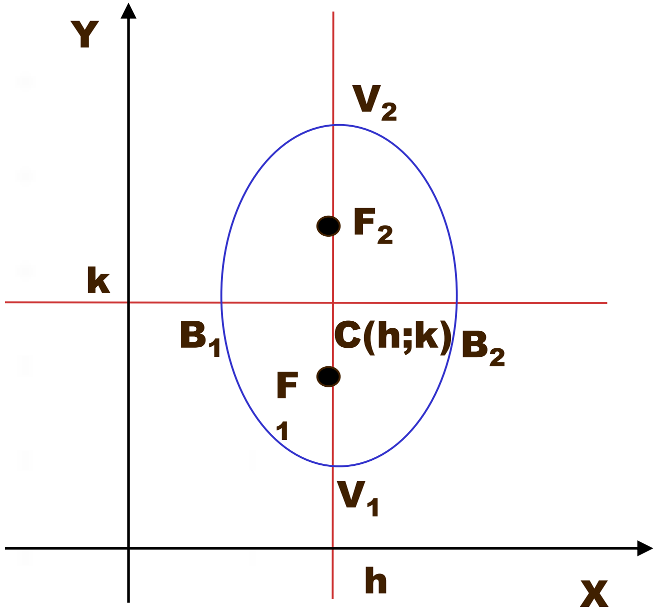
1) Centro (h;k) y eje Focal paralelo al eje x ; su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



2) Centro (h;k) y eje Focal paralelo al eje y su ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

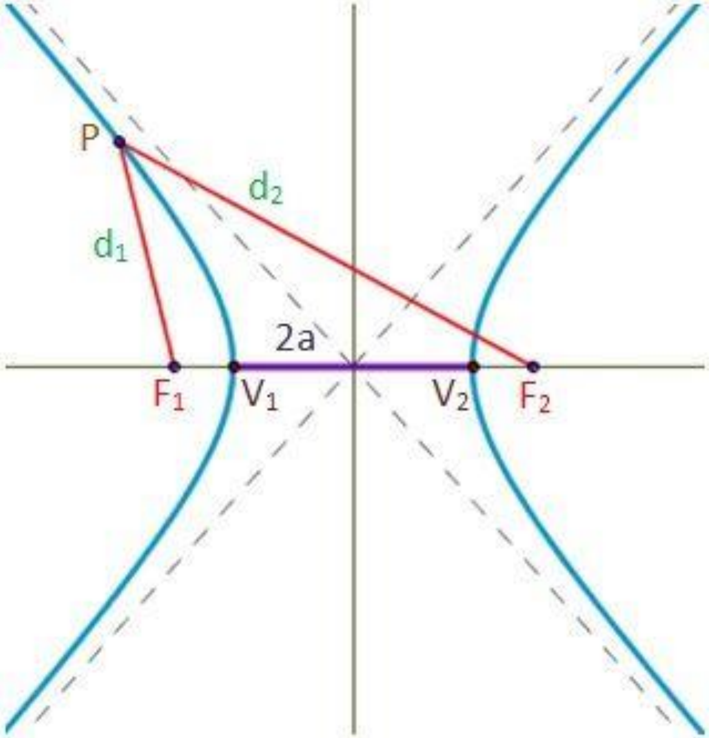


Hipérbola

DEFINICIÓN:

Una hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$.

$$\boxed{\overline{PF} - \overline{PF}' = 2a = k}$$



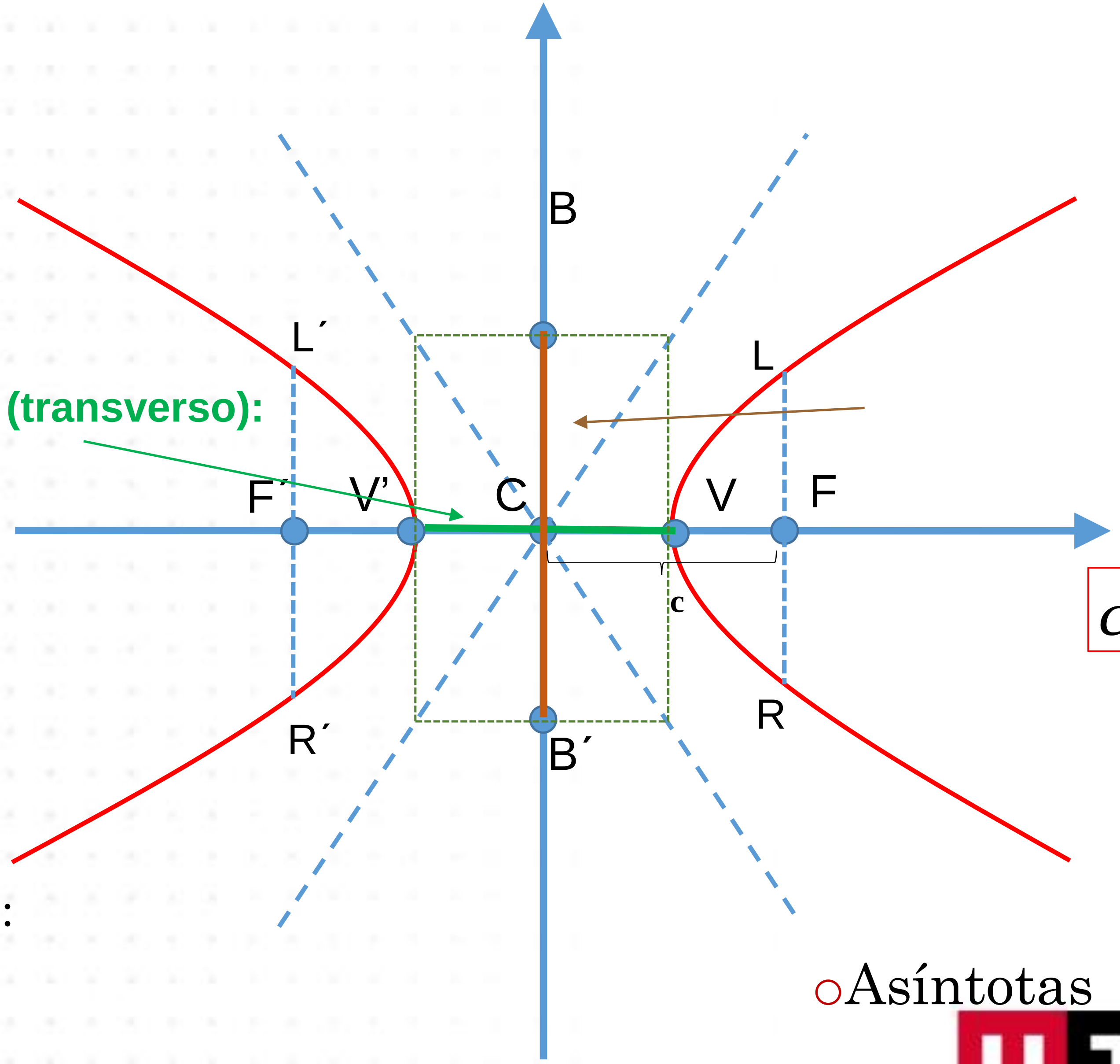
Universidad Tecnológica del Perú

Hipérbola

- Focos: F y F´
- Distancia focal=2c
- Vértices: V y V´
- Centro: C

E
L
E
M
E
N
T
O
S

Eje real (transverso):
VV’=2a



Se cumple:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Excentricidad

- Lados Rectos: LR y L´R´.

- Asíntotas

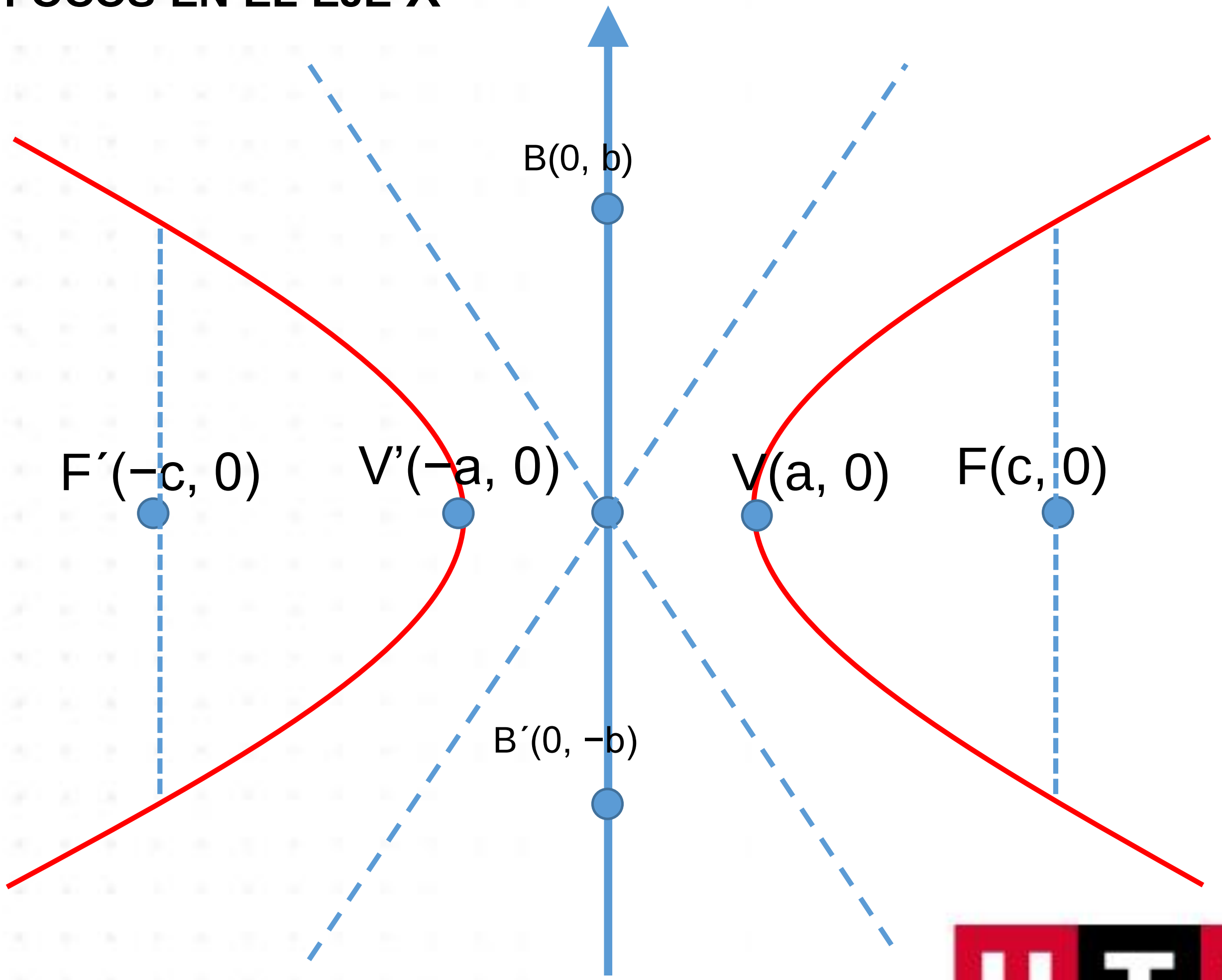
Universidad Tecnológica del Perú

Ecuaciones canónicas de la hipérbola

1) CON CENTRO EN EL ORIGEN Y FOCOS EN EL EJE X

Ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

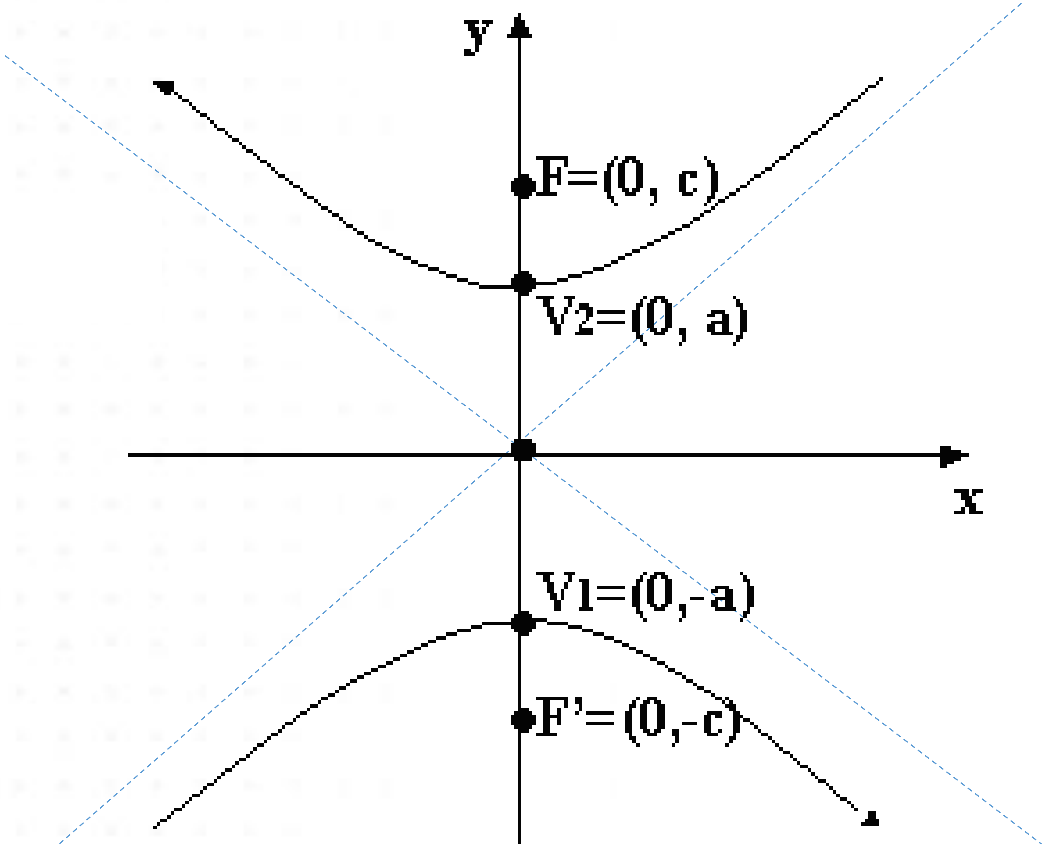


Ecuaciones canónicas de la hipérbola

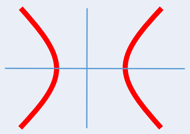
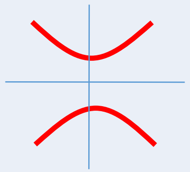
2) CON CENTRO EN EL ORIGEN Y FOCOS EN EL EJE Y

Ecuación:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



Ecuación ordinaria de la hipérbola

	Eje Focal paralelo al eje X	Eje Focal paralelo al eje Y
Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Centro	C(h, k) 	C(h, k) 

Ejercicios explicativos

1. Determine las coordenadas del vértice y focos, de la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$

Solución

Dividendo ambos miembros por 36 nos queda

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$$

$$\frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}y^2 = 1$$

a$= 2$ y b $= 3$

$$A = (-2,0)$$

$$A' = (2,0)$$

$$B = (0,3)$$

$$B' = (-3,0)$$

Ejercicios explicativos

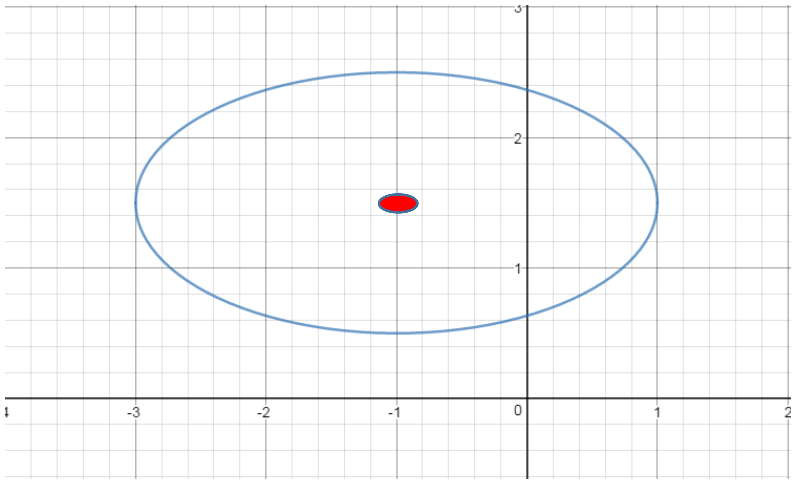
2. Dada la ecuación de la elipse, verificar que el eje focal es paralelo al eje x

$$x^2+4y^2+2x-12y+6=0$$

Solución:

Agrupamos y completamos cuadrados:

$$(x+1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4$$



$$\boxed{\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{1^2}=1}$$

Por lo tanto la elipse tiene su eje focal paralelo al eje x. Porque: “a” es denominador de x

Siendo: $a=2 \wedge b=1$.

Universidad Tecnológica del Perú

Ejercicios explicativos

3. Determine el centro, vértices y focos de la ecuación

$5x^2 + 9y^2 + 50x - 18y + 89 = 0.$

Solución:

$$5(x^2 + 10x) + 9(y^2 - 2y) = -89$$

$$5(x+5)^2 + 9(y-1)^2 = -89 + 125 + 9$$

$$5(x+5)^2 + 9(y-1)^2 = 45$$

$$\frac{5(x+5)^2}{45} + \frac{9(y-1)^2}{45} = \frac{45}{45}$$

$$\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

$$C(-5, 1)$$

$$V_1(-5-3,1) = (-8, 1)$$

$$V_2(-5+3,1) = (-2, 1)$$

$$F_1(-5-2,1) = (-7, 1)$$

$$F_2(-5+2,1) = (-3, 1)$$

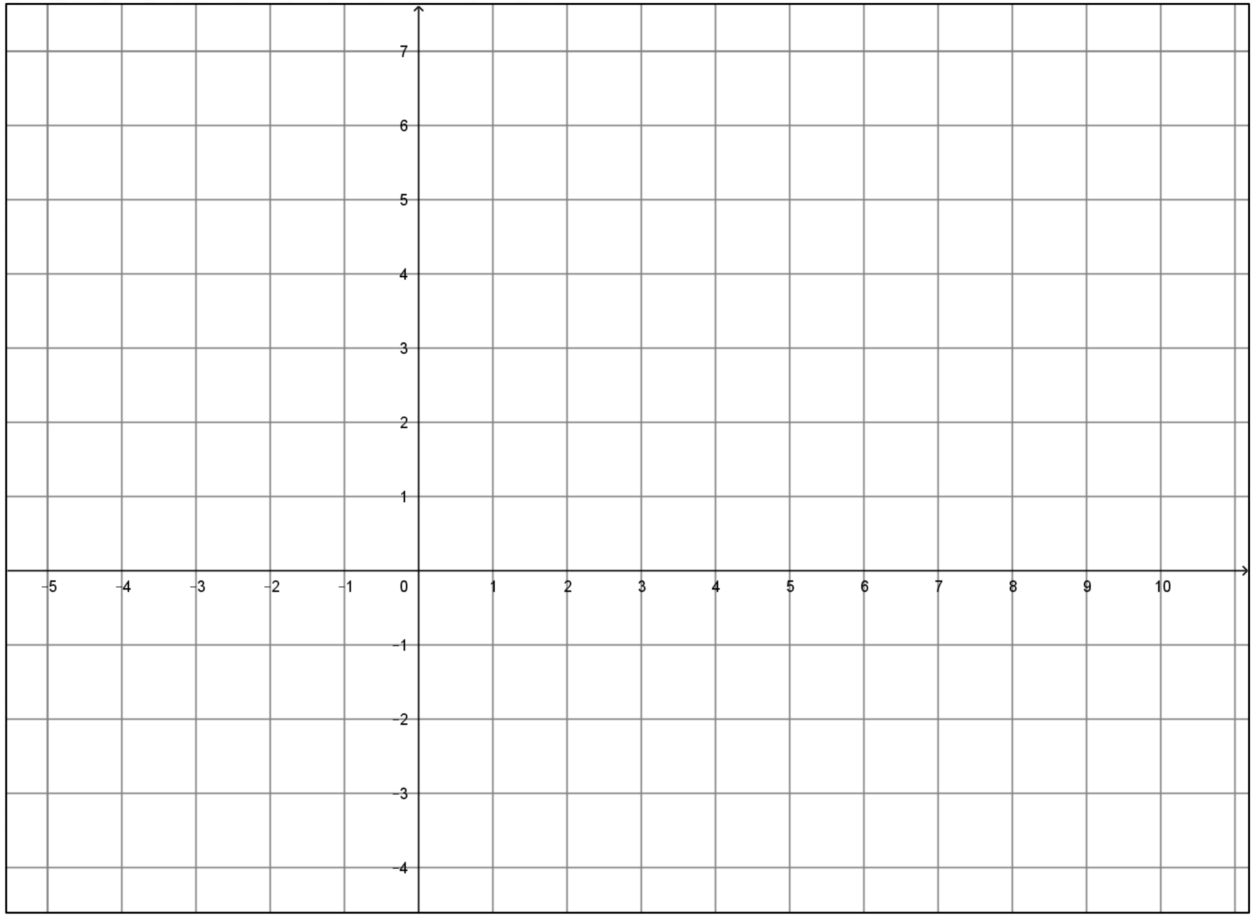
Universidad Tecnológica del Perú

Ejercicio

1. Grafique la hipérbola de ecuación:

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

determine las coordenadas de sus focos.



Ejercicio

2. Represente gráficamente y determine las coordenadas de los focos, de los vértices de la siguiente hipérbola:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$$

Ejercicio

3. Determine las coordenadas de los vértices y los focos de la hipérbola de ecuación $4x^2 - 9y^2 = 36$

Gracias