

Nivelación de Matemática para Ingeniería



Universidad
Tecnológica
del Perú

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO



Universidad
Tecnológica
del Perú

CÁLCULO DE LA GANANCIA MÁXIMA

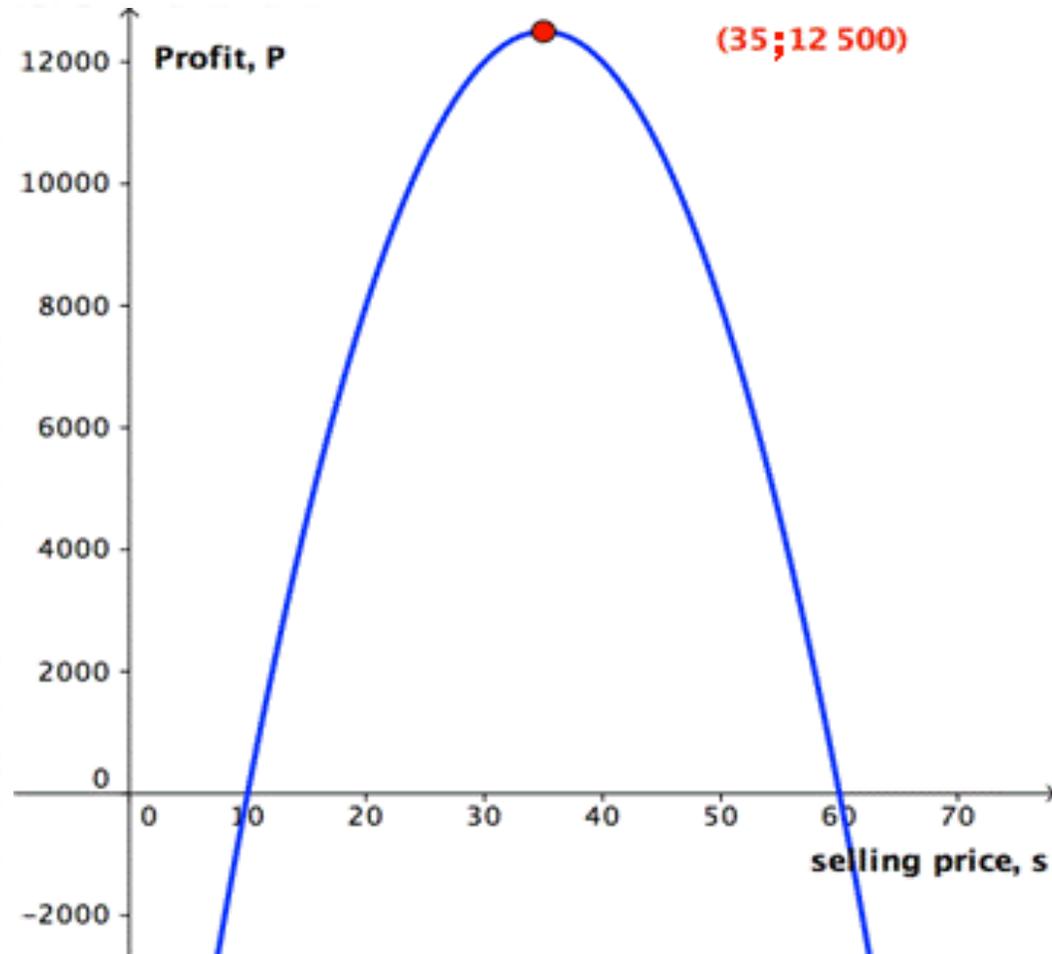
Ejemplo: La fórmula de la ganancia en una empresa es $P(s) = -20s^2 + 1400s - 12000$, donde s representa el precio de venta en dólares. Calcular el precio de venta en el cual no se produce ganancia.

Resolviendo la ecuación:

$$-20s^2 + 1400s - 12000 = 0$$

$$\text{Obtenemos } s = \{10 ; 60\}$$

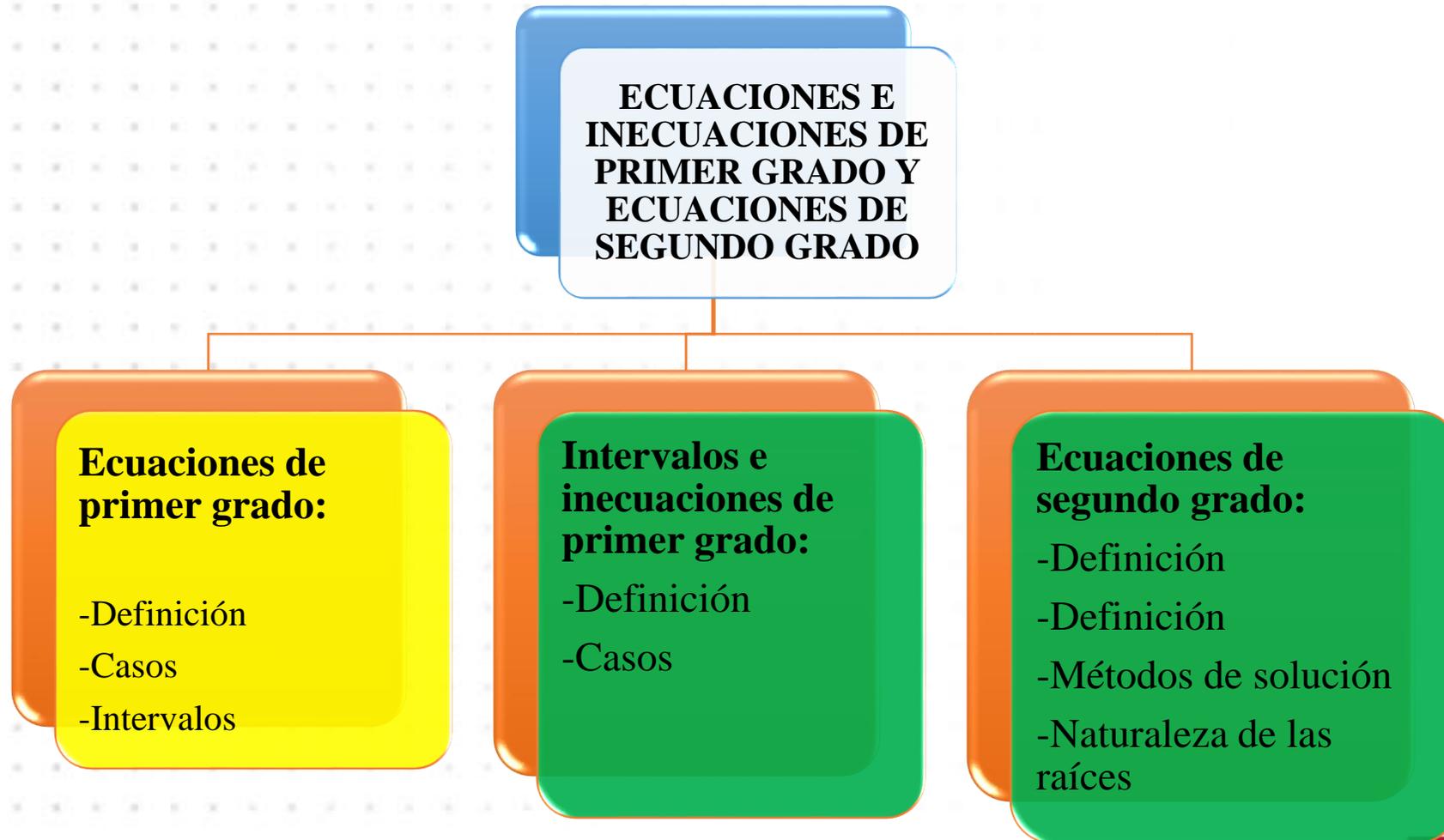
Es decir no se produce ganancia cuando el precio de venta es \$10 ó \$60.



LOGRO DE LA SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante identifica y resuelve ecuaciones de segundo grado. Modela problemas sencillos y los resuelve.

ESQUEMA DE LA UNIDAD



ECUACIÓN CUADRÁTICA

Es aquella ecuación polinomial de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$



Se conocieron algoritmos para resolverla en Babilonia y Egipto. En Grecia fue desarrollada por el matemático **Diophanto de Alejandría**. La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham Bar Hiyya, en su *Liber Embadorum*.

Métodos de solución

1) Por factorización.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Factorizamos por aspa simple

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Diagram illustrating the cross-multiplication method for factoring the quadratic equation $3x^2 - 7x + 2 = 0$. The terms $3x$ and x are on the left, and -1 and -2 are on the right. Red arrows show the cross-multiplication: $3x$ multiplied by -2 , x multiplied by -1 , and the resulting terms $-6x$ and $-x$ are added to get $-7x$.

$$\rightarrow (3x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 2$$

$$\rightarrow \text{CS} = \left\{ \frac{1}{3}; 2 \right\}$$

Métodos de solución

2) Completando el cuadrado.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

Sumamos 3

$$x^2 + 4x + 4 = 3$$

$$\rightarrow (x + 2)^2 = 3 = \sqrt{3}^2$$

$$\rightarrow (x + 2)^2 - \sqrt{3}^2 = 0$$

$$\rightarrow (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\rightarrow x = -2 - \sqrt{3} \vee x = -2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{CS} = \{-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\}$$

3) Por fórmula general.

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Naturaleza de las raíces

La discusión de las raíces (x_1) y (x_2) de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ depende de la cantidad subradical $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ que se denomina discriminante o invariante característico.

Primer caso: Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (positivo)

Las raíces son reales desiguales

❖ Si $\Delta = k^2$ (cuadrado perfecto), raíces racionales.

❖ Si $\Delta \neq k^2$, raíces irracionales conjugadas:

$$x_1 = m + \sqrt{n} \quad y \quad x_2 = m - \sqrt{n}$$

$$c. s. = \{x_1; x_2\}$$

Naturaleza de las raíces

Segundo caso: Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Las raíces son reales iguales

El trinomio de la ecuación es un cuadrado perfecto. $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Conjunto unitario: C.S. = $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Tercer caso: Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (negativo)

No existe solución en el conjunto de los números reales.

$$c. s. = \emptyset$$

Propiedades de las raíces



Primera propiedad

Suma de raíces (S)

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Segunda propiedad

Producto de raíces (P)

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Nota:

❖ Diferencia de raíces

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

❖ Raíces simétricas (contrarias , opuestas)

$$\text{Suma de raíces cero } x_1 + x_2 = 0$$

❖ Raíces recíprocas (inversas)

$$\text{Producto de raíces es la unidad } x_1 \cdot x_2 = 1$$

Reconstrucción de una ecuación de segundo grado

Dato: Las raíces x_1 y x_2

Incógnita: La ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Se aplican los siguientes procedimientos

1° Por factorización.-

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad x: \text{variable}$$

x_1 y x_2 : Raíces conocidas

2° Por propiedades de las raíces.-

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = x_1 + x_2 \wedge P = x_1x_2$$

Desaprende lo que te limita

Ejercicios explicativos

1. Resolver: $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

Solución

Eliminamos los denominadores $6x^2 - 7x + 2 = 0$

Aplicamos la ecuación general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Reemplazamos

✓ Primera raíz $x = \frac{7 + \sqrt{49 - 4(2)(6)}}{12} = \frac{7 + \sqrt{1}}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

✓ Segunda raíz $x = \frac{7 - \sqrt{49 - 4(2)(6)}}{12} = \frac{7 - \sqrt{1}}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Las raíces son **2/3 y 1/2**



Universidad
Tecnológica
del Perú

Desaprende lo que te limita

Ejercicios explicativos

Resolver: $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

Solución

Ordenamos: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Aplicamos la ecuación general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Reemplazamos

✓ Primera raíz $x = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 + \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

✓ Segunda raíz $x = \frac{4 - \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 - \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Ambas raíces son de valor 2

Ejercicios explicativos

$$\text{Resolver: } x^2 - 5x + 6 = 0$$

Solución

Podemos aplicar aspa simple u otros métodos, pero usaremos la ecuación

$$\text{general: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ Donde: } a = 1, b = -5, c = 6$$

Reemplazamos Primera raíz

$$x = \frac{5 + \sqrt{25 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$\checkmark \text{ Segunda raíz } x = \frac{5 - \sqrt{25 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 - \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Las raíces son 3 y 2

Ejercicios explicativos

Hallar las raíces de: $\frac{2}{5}x^2 = 0$

Solución

Eliminamos el denominador

$$5 \left(\frac{2}{5} x^2 \right) = 5(0)$$

Calculamos las raíces:

$$2x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Ambas raíces son iguales y son cero



Universidad
Tecnológica
del Perú

Desaprende lo que te limita

Ejercicios explicativos

Hallar las raíces de: $x^2 - 5x = 0$

Solución

$$x^2 - 5x = 0$$

Aplicamos la factorización:

$$x(x - 5) = 0$$

Hallamos las raíces

$$x = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Las raíces serán: 0 y 5



Universidad
Tecnológica
del Perú

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS RETO

1. Resuelve:

$$x(x - 6) = 91$$

2. Resuelve:

$$7x^2 - 3x - 2 = 0$$

Gracias