SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MATRICES

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la unidad, el estudiante resuelve ejercicios aplicadas a la ingeniería y otros campos de estudio mediante los sistemas de ecuaciones lineales basado en la teoría de matrices.

Universidad Tecnológica del Perú

MATRICES

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Desaprende lo que te limita

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal

$$\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{B}$$

*Para su solución destacaremos **dos métod***

1 MÉTODO MATRIZ INVERSA

Este método se aplica sólo a sistemas de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

Dada la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

el método consiste en hallar X por:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

RECORDEMOS:

Si $|A| \neq 0$, entonces $\exists A^{-1}$ por lo tanto existe una solución única para $X = A^{-1} \cdot B$

Si $|A| = 0$, entonces $\nexists A^{-1}$ su solución no es única por lo que se usará otro tipo de solución.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-3z &= 4 \\ x+2y-2z &= 10 \\ 3x-y+5z &= 14 \end{cases}$

Hallemos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

$$|A| = 18$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 8 & -11 & -7 \\ -2 & 14 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 32-20+56 \\ -44+140-14 \\ -28+40+14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34/9 \\ 41/9 \\ 13/9 \end{bmatrix}$$

existe una solución única

2 MÉTODO ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDÁN

El método es aplicado a cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales ("n" ecuaciones, "m" incógnitas) y no es necesario que $|A| \neq 0$, o que exista A^{-1}.

Dada la ecuación

$$A \cdot X = B$$

El método consiste en ***generar la matriz aumentada***

$$[A \ : B]$$

la cual se reducirá a una matriz canónica o de forma escalonada por filas, para luego con ésta nueva matriz escribir un nuevo sistema de ecuaciones.

$UnicaSolución$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$NohaySolución$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$InfinitasSoluciones$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Estos son casos mucho mas reales y que ocurren con frecuencia en las ingenierías y otros campos de estudio..

EJEMPLO 2

Determine el tipo de solución del sistema siguiente y expresе el conjunto solución adecuadamente

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Éstas entradas tienen que volverse **0**.

a_{21} , a_{31} , a_{32}

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & -4 \\ 3 & -5 & 8 & : & -14 \\ 1 & 3 & -2 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & -4 \\ & & & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & -4 \\ 0 & -1 & 1 & : & -1 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$$21 \Rightarrow \begin{matrix} 3 & -5 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -6 & 12 \end{matrix}$$

$$31 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{matrix}$$

$$32 \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & -4 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Tiene infinitas soluciones

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Plaza Vea quiere ofertar tres tipos de paquetes A, B y C. El paquete A contiene $1kg$ de azúcar, $3kg$ de arroz y $2kg$ de fideo extra light; el paquete B contiene $2kg$ de azúcar, $1kg$ de arroz y $6kg$ fideo extra light; el paquete C contiene $1kg$ de cada uno de los anteriores ¿Cuántos paquetes se podrá elaborar si se cuenta con $36kg$ de azúcar, $45kg$ de arroz, $90kg$ de fideo extra light?

   Exprese el sistema y resuelva por el método de eliminación gaussiana. (*Vea el mismo ejercicio de la primera semana y razone Ud. por que se trabajan de manera distinta*)

$$\begin{array}{c} \\ Azucar \\ Arroz \\ Fideo \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 36 \\ 3x + y + z = 45 \\ 2x + 6y + z = 90 \end{cases}$$

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 45 \\ 2 & 6 & 1 & \vdots & 90 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ & & & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 36 \\ 0 & -5 & -2 & \vdots & -63 \end{bmatrix}$$

$$21 \Rightarrow \begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 45 \\ -3 & -6 & -3 & -108 \end{matrix}$$

$$31 \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 6 & 1 & 90 \\ -2 & -4 & -2 & -72 \end{matrix}$$

$$32 \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 10 & -5 & 90 \\ 0 & -10 & -4 & -126 \end{matrix}$$

$$-9z = -36$$

$$z = 4$$

$$-5y - 2(4) = -63$$

$$y = 11$$

$$x + 2(11) + 4 = 36$$

$$x = 10$$

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Aprendimos **2 métodos** para dar solución a un sistema de ecuaciones.
2. Para el método de la matriz inversa debo recordar como hallar A^{-1}
3. Ampliamos nuestra matriz con la matriz de constantes y escalonamos la matriz usando ***Gauss-Jordan***.

Excelente tu participación

No hay nada como un reto para sacar lo mejor de nosotros.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

LISTO PARA MI EJERCICIO RETO

Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIO RETO

Resolver por el método de eliminación de Gauss - Jordán

$$\begin{cases} 3x + 4y - 3z = 5 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

R.: $X = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -7/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Universidad Tecnológica del Perú

Universidad Tecnológica del Perú

Sistema de Ecuaciones Lineales

Lo logré

Universidad
Tecnológica
del Perú