SECCIONES CÓNICAS

LA CIRCUNFERENCIA

Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce las diversas ecuaciones de la circunferencia, resuelve ejercicios de circunferencia, referentes a la distancia de un punto a la Circunferencia y la ecuación de una recta tangente a la Circunferencia.

Universidad Tecnológica del Perú

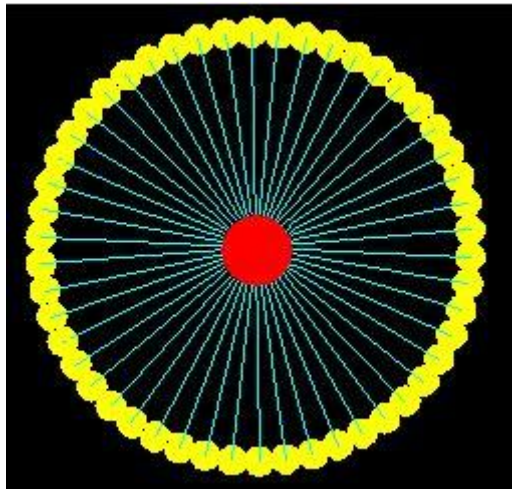
Universidad Tecnológica del Perú

SECCIONES CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

LUGAR GEOMÉTRICO

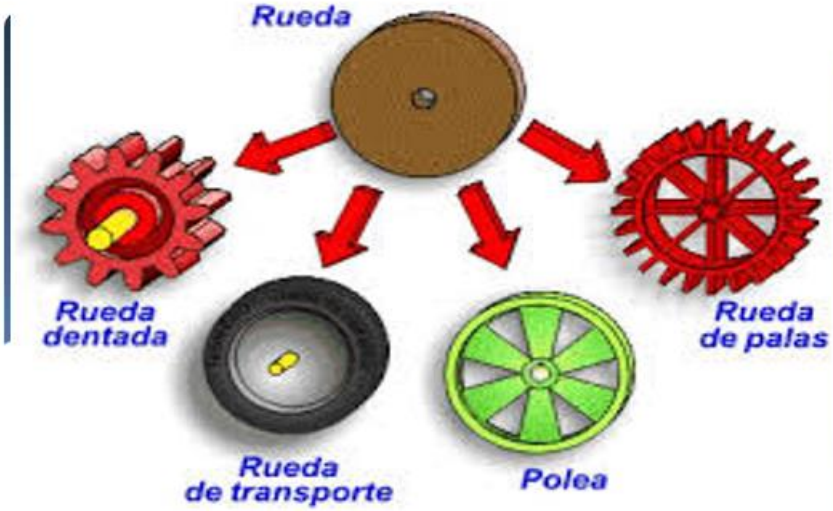
Es un conjunto de puntos en un plano que cumplen una misma propiedad geométrica .

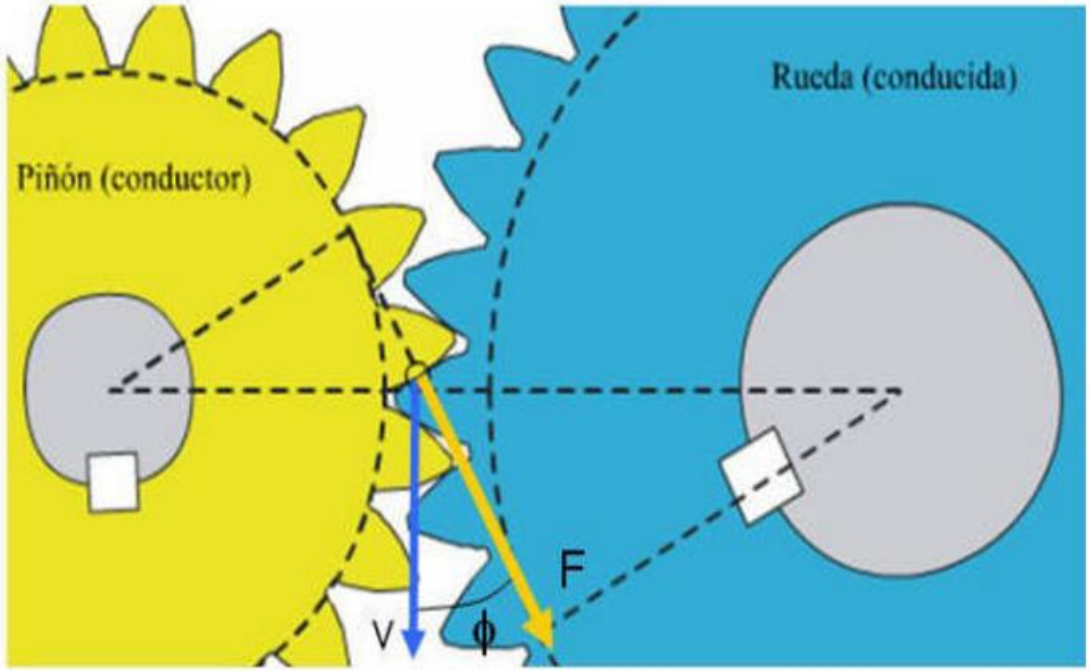


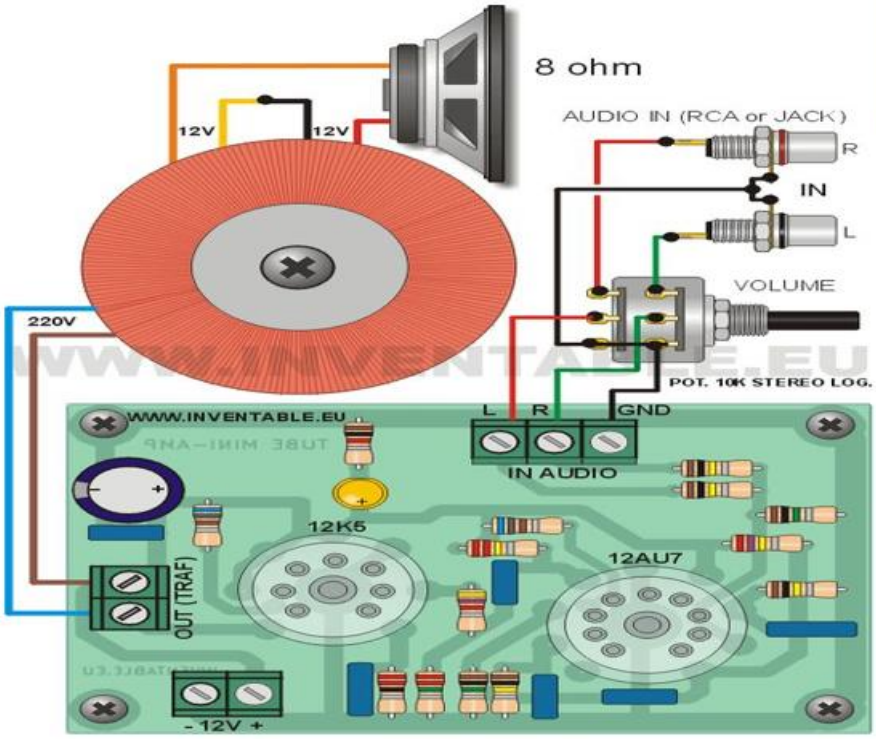
***Ejemplo**: Dibujamos 50 puntos amarillos que gozan de la propiedad de estar a la misma distancia del centro, que es el punto rojo. Esa distancia viene representada por una línea azul y es la misma para todos los puntos amarillos.*

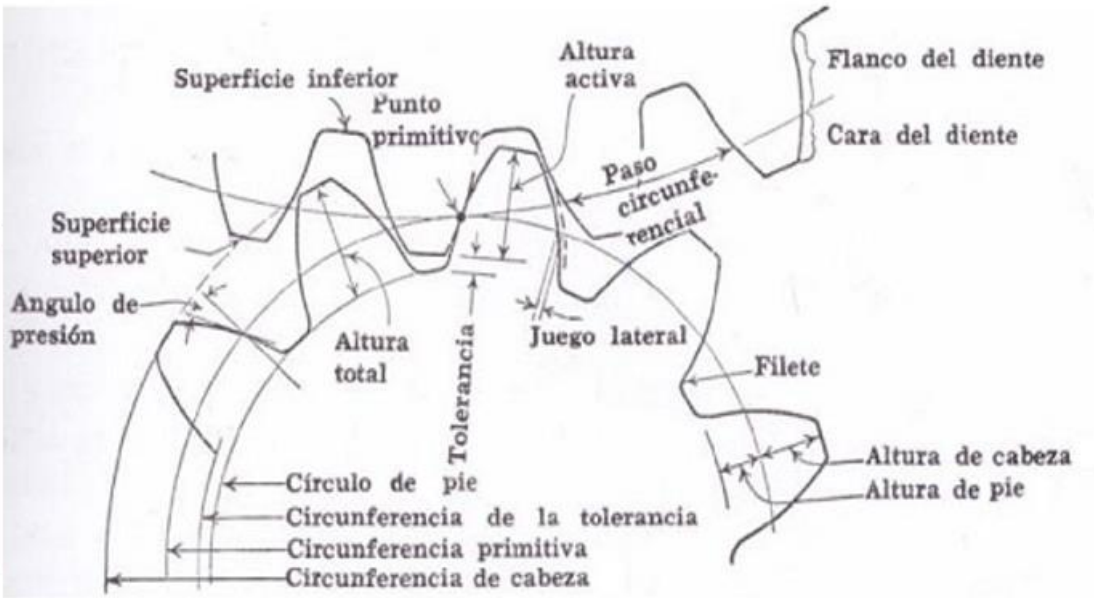
*El **lugar geométrico** de todos los puntos equidistantes del centro representa una **circunferencia**.*

UTILIDAD


Rueda
Rueda dentada
Rueda de palas
Rueda de transporte
Polea

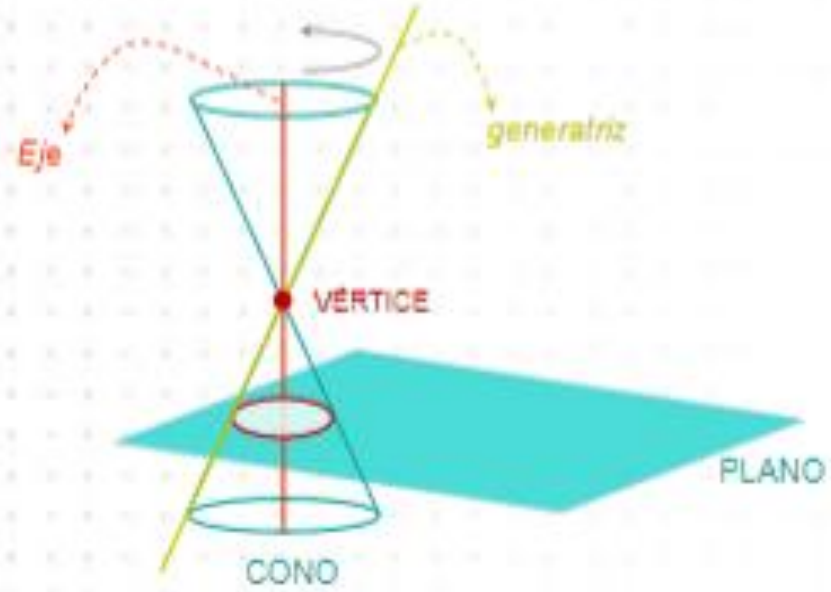

Rueda (conducida)
Piñón (conductor)
V
ϕ
F

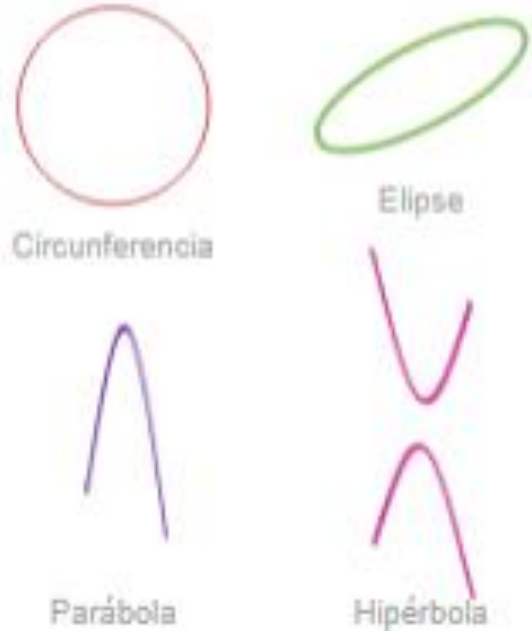

8 ohm
12V
12V
AUDIO IN (RCA or JACK)
R
IN
L
VOLUME
220V
POT. 10K STEREO LOG.
WWW.INVENTABLE.EU
L
R
GND
IN AUDIO
12K5
12AU7
OUT (TRAF)
- 12V +


Superficie inferior
Punto primitivo
Altura activa
Flanco del diente
Cara del diente
Paso circunferencial
Superficie superior
Angulo de presión
Altura total
Tolerancia
Juego lateral
Filete
Altura de cabeza
Altura de pie
Círculo de pie
Circunferencia de la tolerancia
Circunferencia primitiva
Circunferencia de cabeza

SECCIONES CÓNICAS

El nombre de "secciones cónicas" se derivó del hecho de que estas figuras se encontraron originalmente en un cono. Cuando se hace intersecar un cono con un plano obtenemos distintas figuras. Cada una de ellas es una cónica.





CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia de otro punto fijo del mismo plano denominado centro.

Ecuación Ordinaria

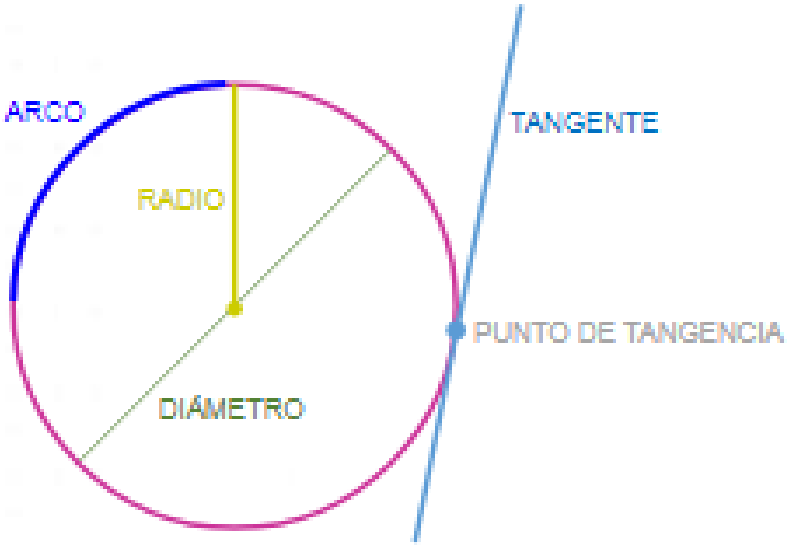
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ecuación Canónica

$$x^2+y^2=r^2$$

Ecuación General

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$



$$\text{Área} = \pi r^2$$

$$\text{Longitud} = 2\pi r$$

1.1 Elementos

Centro: *Es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.*

Radio: *Es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.*

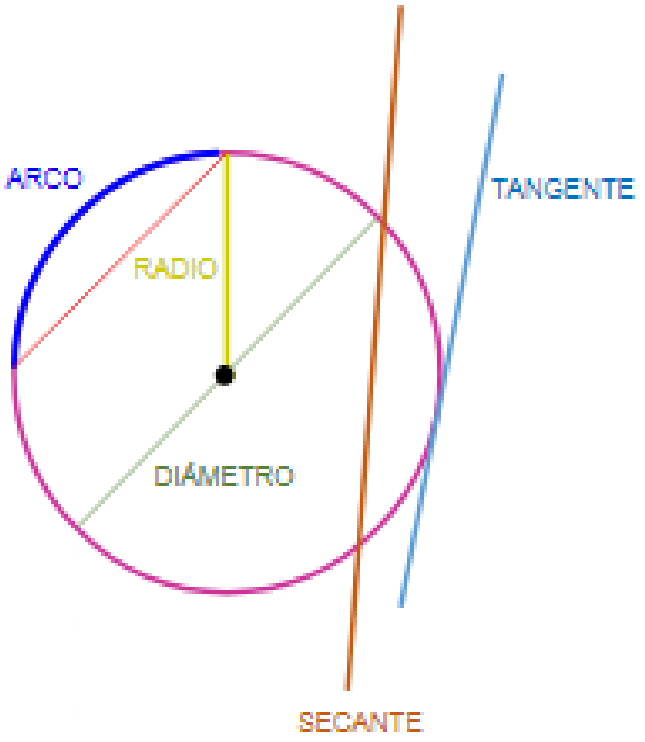
Cuerda: *Es un segmento que une dos puntos cualesquiera que pertenecen a la circunferencia.*

Diámetro: *Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro es la mayor cuerda que se pueda trazar a una circunferencia.*

Arco: *Es la parte de una circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.*

Recta secante: *Es la línea que corta a la circunferencia en dos puntos.*

Recta tangente: *Es la línea que toca a la circunferencia en un solo punto. El punto donde toca a la circunferencia se llama punto de tangencia. Una recta tangente siempre es perpendicular al radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro de la circunferencia.*



Ejemplo 41. *Determine la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es* $(1, -2)$ *y pasa por el punto* $(3, 5)$.

SOLUCIÓN:

$$d(C,P) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-5)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 49}$$

$$r = \sqrt{53}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = \sqrt{53}^2$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 53$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 53 = 0$$

$$C: \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 48 = 0$$

Desaprende lo que te limita

EJEMPLO

Halla y grafica la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro $C = (-3, 0)$ y que pasa por $P = (3, -8)$.

Solución

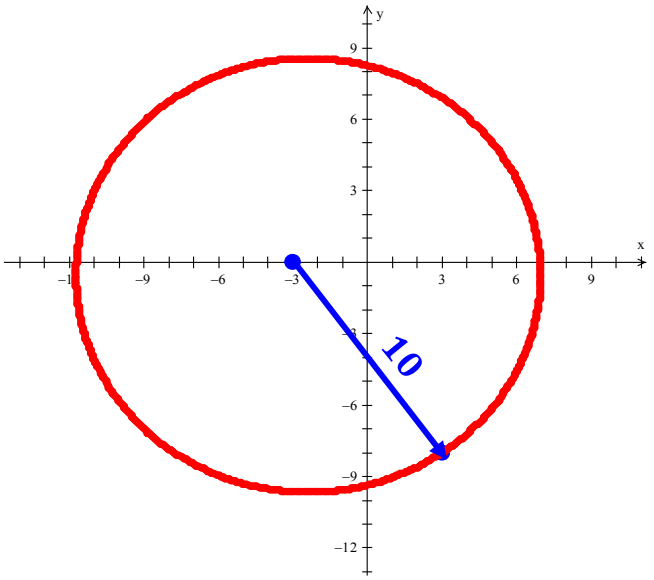
$$\| P - C \| = r$$

$$\|(3, -8) - (-3, 0)\| = r$$

$$\|(3 + 3, -8 - 0)\| = r$$

$$\sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = r$$

$$10 = r$$



$$\mathcal{C}: (x + 3)^2 + y^2 = 100$$

Conversión de forma general a forma ordinaria

Ecuación General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ecuación Ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se requiere factorizar mediante la técnica de completar cuadrados para expresar un trinomio en la forma de un binomio cuadrado.

Ejemplo 42. *Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia:*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

SOLUCIÓN:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 11 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$(x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Es el número que estoy completando, y para mantener la igualdad debo aumentarlo en el otro miembro de la ecuación.

Desaprende lo que te limita

EJEMPLO

Dada la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 6 = 0}$; encuentre si es posible el centro y radio de la circunferencia.

Solución

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = -6$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -6 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 19$$

Rpta. C(3; -4) y r = $\sqrt{19}$

EJEMPLO

Dada la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 12x - 6y + 45 = 0}$; encuentre si es posible el centro y radio de la circunferencia.

Solución

$$x^2 + 12x + y^2 - 6y = -45$$

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = -45 + 36 + 9$$

$$(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

Rpta. La ecuación no es una circunferencia, es el punto en el plano (-6;3)

EJEMPLO

Dada la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 28 = 0}$; encuentre si es posible el centro y radio de la circunferencia.

Solución

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 28 = 0$$

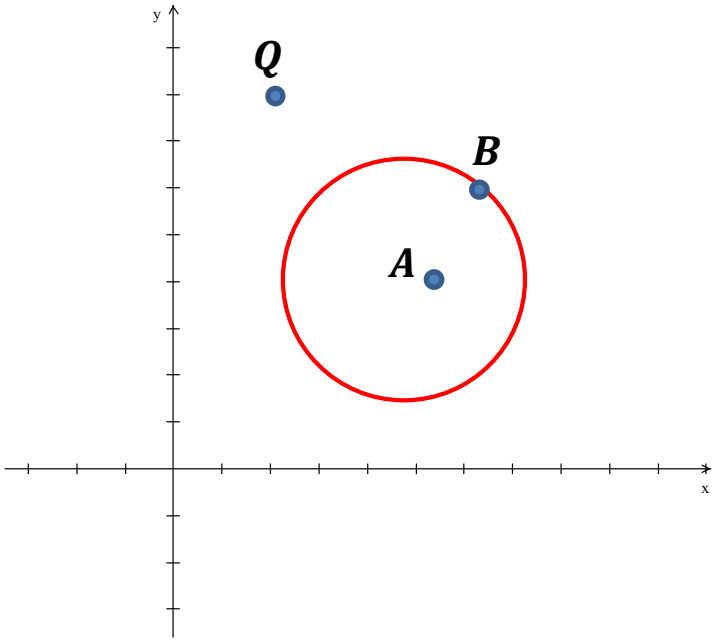
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -28 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = -3$$

Rpta. La ecuación no corresponde a una circunferencia

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Un punto en el plano puede ubicarse dentro de la circunferencia, en la misma circunferencia o en el exterior de la circunferencia.



A está dentro de la circunferencia.

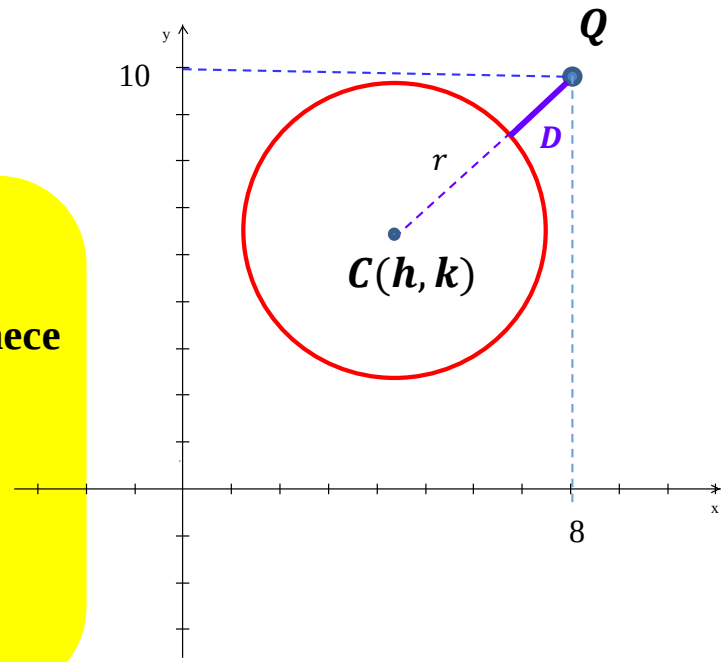
B es un punto de la circunferencia.

Q es un punto exterior a la circunferencia.

Solamente el punto ***Q*** puede determinar una distancia.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Dada la circunferencia de centro C(2, 6) y radio 6, halle la distancia del punto $Q = (8,10)$ a la circunferencia



Solución

La distancia del centro al punto Q

$$d(C,Q) = \sqrt{(8-2)^2 + (10-6)^2}$$

$$d(C,Q) = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \sim 7.2$$

$$\boldsymbol{D = 7.2 - 6 = 1.2}$$

Observación:

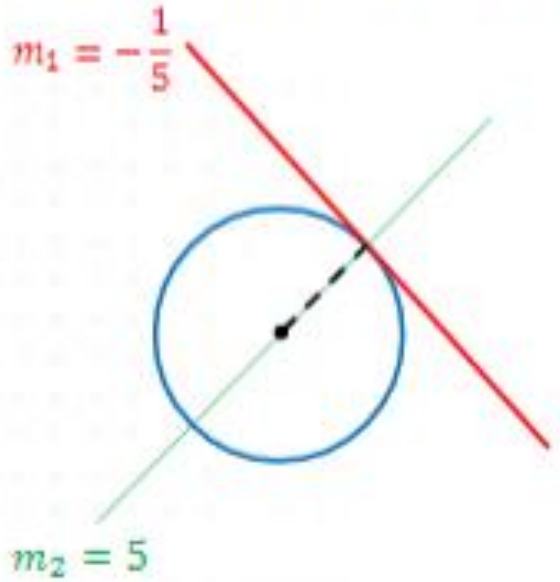
***Si $D = 0$;* el punto pertenece a la circunferencia**

***Si $D < 0$;* el punto se encuentra dentro de la circunferencia**

2 RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Es una recta que toca a la circunferencia en un punto, forma un ángulo recto con el radio vector de la circunferencia, que a su vez puede estar contenida en una recta Normal a la recta Tangente. Ambas rectas son siempre perpendiculares.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$



LA RECTA

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejercicio explicativo

Ejemplo 43. *Hallar la ecuación general de la recta tangente a la circunferencia* $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ *en el punto* $Q(5,2)$

SOLUCIÓN:

$$m_1=\frac{3-2}{2-5}=-\frac{1}{3}$$

$$m_1\cdot m_2=-1$$

$$-\frac{1}{3}\cdot m_2=-1$$

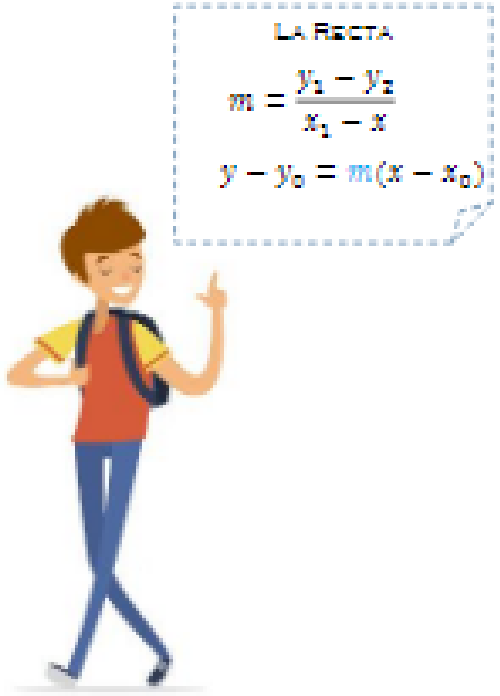
$$m_2=3$$

Reemplazando:

$$(y-2)=3(x-5)$$

$$y-3=3x-15$$

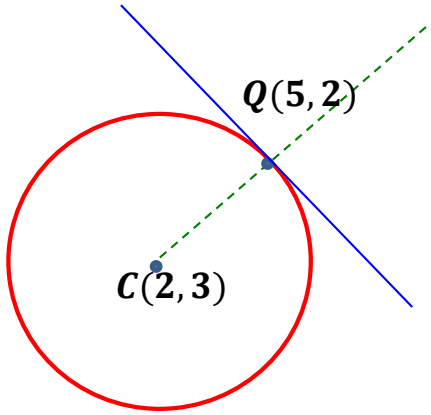
$$L_T: 3x-y-12=0$$



Desaprende lo que te limita

Ejercicio explicativo

Halle la ecuación de la recta tangente a la **circunferencia** $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ en el punto $Q=(5,2)$



$$(x,y)=(2,3)+\alpha(3,-1) \Rightarrow m_N=-\frac{1}{3}$$

$$(m_N)(m_T)=\left(-\frac{1}{3}\right)(m_T)=-1 \Rightarrow m_T=3$$

La ecuación de la recta Tangente es:

$$(x,y)=(5,2)+\alpha(1,3)$$

Nota: En un examen si no especifica el tipo de ecuación de la recta, cualquiera vale como respuesta; similar a este caso donde hallamos la ecuación vectorial.

Ejercicio explicativo

1. Dada la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$
   a. Encuentre si es posible el centro y radio de la circunferencia.
   b. Halle la distancia del punto Q = (-3,-4) a la circunferencia

2. Dada la ecuación: $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 20 = 0;$
   a. Encuentre si es posible el centro y radio de la circunferencia.
   b. Halle la ecuación Paramétrica de la recta tangente a la circunferencia en el punto (-1,8)

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Los elementos principales para la ecuación de la circunferencia son el centro y el radio.
2. El centro y un punto de la circunferencia forma una recta, ésta es perpendicular con la recta tangente en ese punto, entonces se cumple que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Excelente tu participación

Las dificultades me hacen más fuerte.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Dada $4x^2 + 4y^2 + 12x - 1 = 0$ determine si es un punto, una circunferencia o un conjunto vació. Si es una circunferencia, encuentre su centro y radio.

SOLUCIÓN:

$$x^2 + y^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{2}$$

$$C\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \; r = \sqrt{5/2}$$

RPTA: *Es una circunferencia*

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Determinar los valores de k para que la recta $L: 3x - 2y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia.

$$C: \; x^2 + y^2 - 4x + 6y - 39 = 0$$

SOLUCIÓN:

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 52$

$C(2,-3)$; $r = \sqrt{52}$

$d(C,L) = r$

$$\frac{|3(2) - 2(-3) + k|}{\sqrt{9+4}} = \sqrt{52}$$

$$|k + 12| = 26$$

$k = 14$ $\quad$ $k = -38$

RPTA: $k = 14 \, ; k = -38$

EJERCICIO RETO

Determinar los valores de k para que la recta $L: kx + y + k - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $C: x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$

UTP Universidad Tecnológica del Perú

Universidad
Tecnológica
del Perú