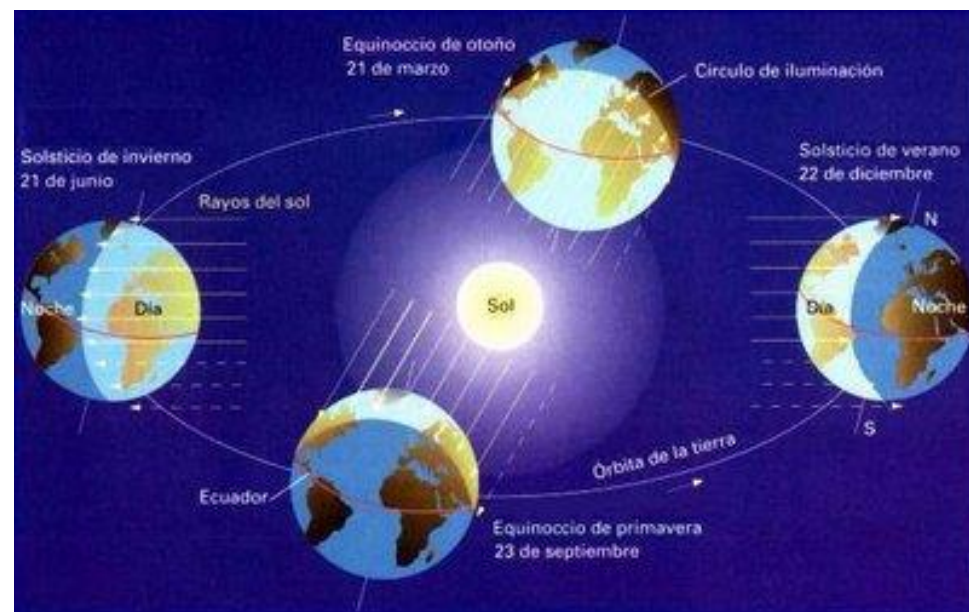


Universidad
Tecnológica
del Perú

SECCIONES CÓNICAS

ELIPSE



Universidad
Tecnológica
del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante identifica los elementos y grafica la elipse. Reconoce las diferentes expresiones algebraicas que representan una elipse y resuelve problemas aplicados a la ingeniería donde utiliza conceptos y propiedades de la elipse.



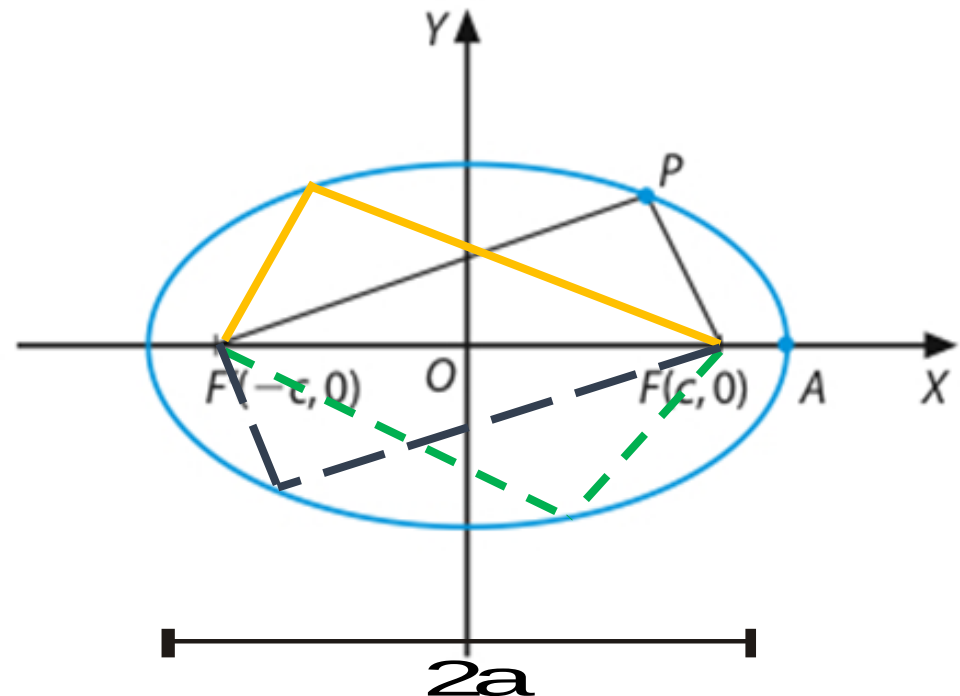
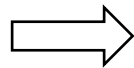
Universidad
Tecnológica
del Perú

LA ELIPSE

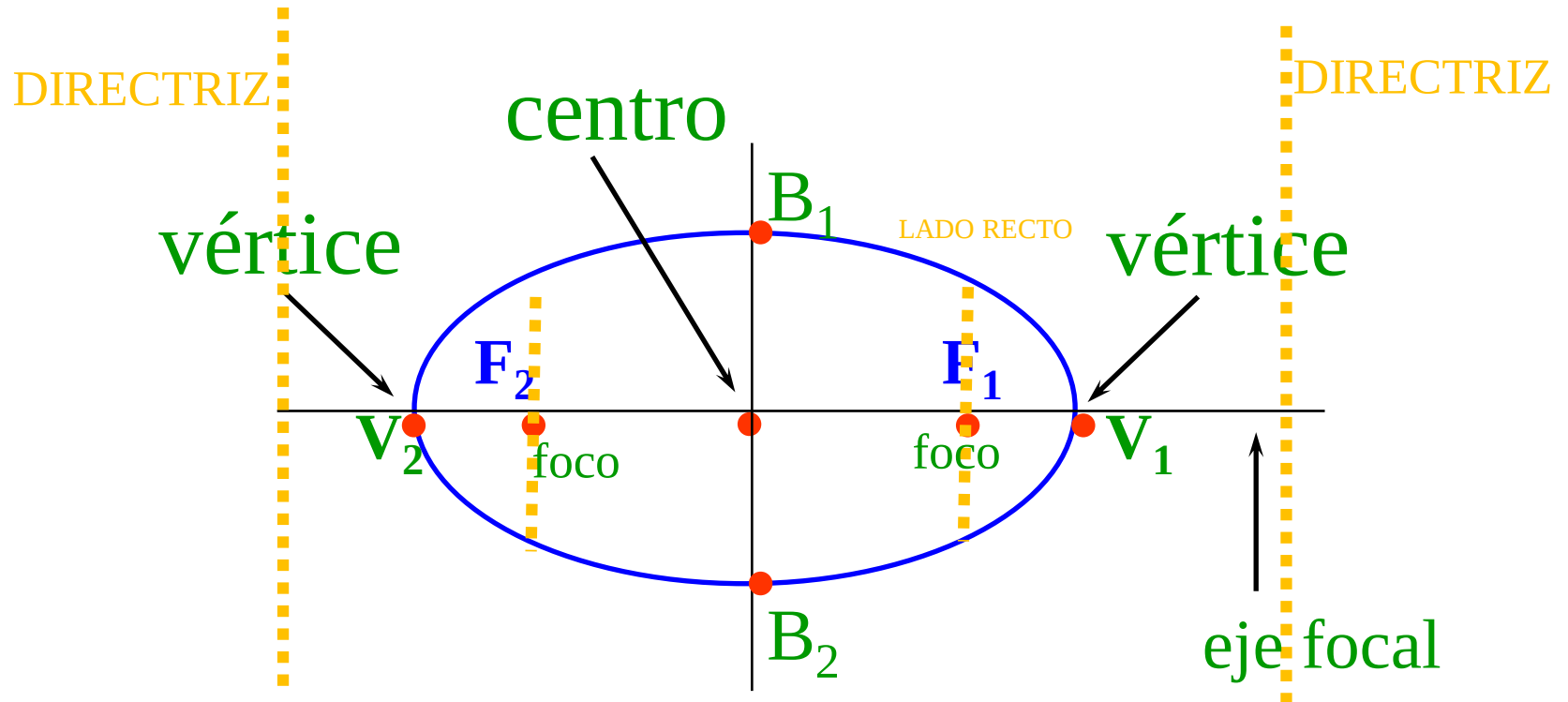
DEFINICIÓN:

Es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre igual a una constante positiva $2a$

$$d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$$



LA ELIPSE



V_1V_2 : eje mayor

B_1B_2 : eje menor

Observaciones:

1. En la siguiente elipse :

Se tiene que :

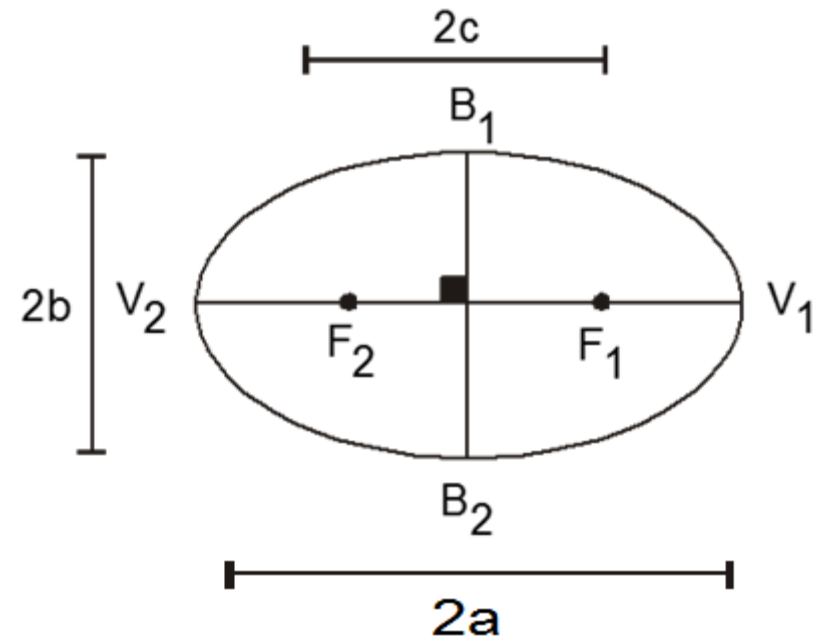
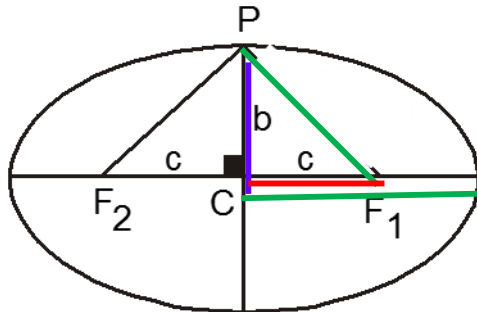
Longitud del eje mayor: $\overline{V_1V_2} = 2a$

Longitud del eje menor: $\overline{B_1B_2} = 2b$

Longitud del segmento focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$

2. La relación entre a, b y c ; es :

$$a^2 = b^2 + c^2$$



3. Un elemento importante de la elipse es su excentricidad que se representa por “e” y se define así :

$$0 < e < 1.$$

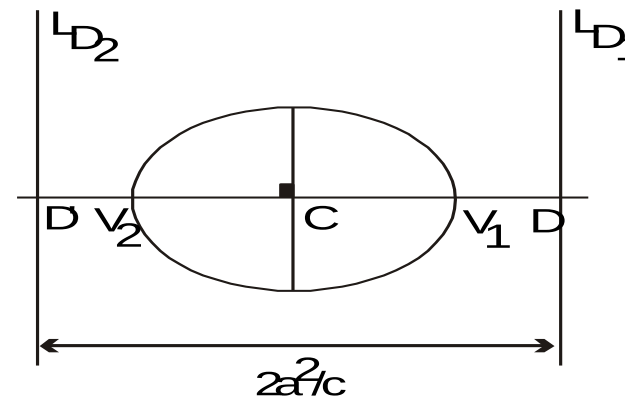
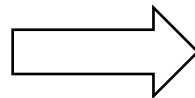
$$e = \frac{c}{a}$$

4. La longitud del lado recto es :

$$L_R = \frac{2b^2}{a}$$

5. La distancia entre las rectas directrices es:

$$DD' = \frac{2a^2}{c}$$



ECUACIONES DE LA ELIPSE

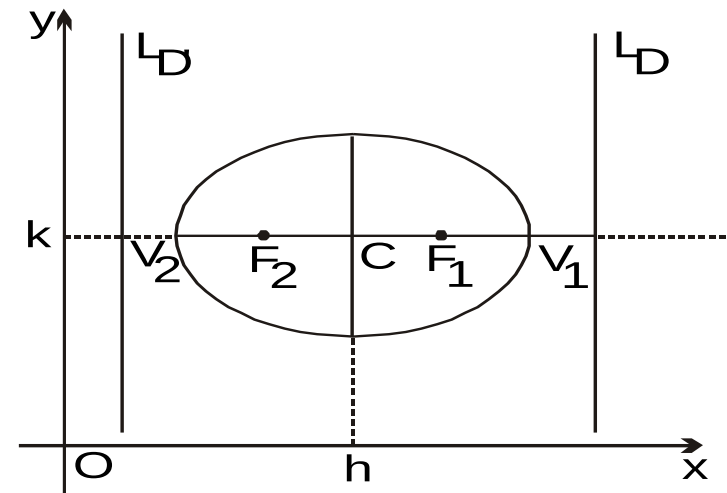
1. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "X"

a) **Forma ordinaria:** Es una elipse con centro en (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X, su ecuación es :

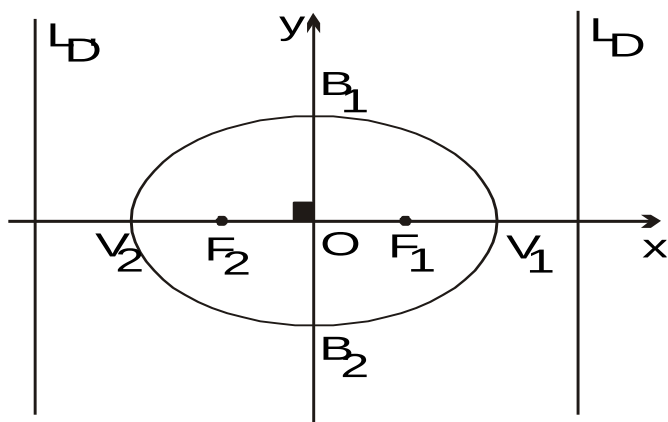
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_D : x = h + \frac{a^2}{c} \quad L_{D'} : x = h - \frac{a^2}{c}$$



b) Forma canónica:



Ecuación canónica de la Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_D : x = \frac{a^2}{c} \quad L_{D'} : x = \frac{-a^2}{c}$$

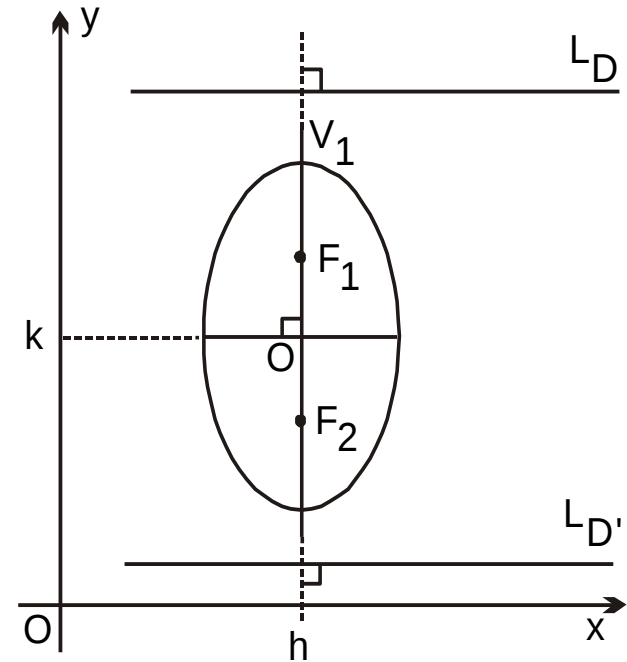
2. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "Y"

a) **Forma ordinaria:** Es una elipse con centro en (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

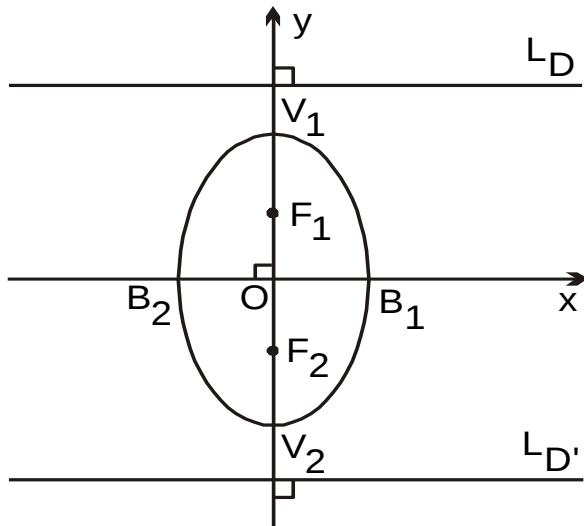
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_D : y = k + \frac{a^2}{c} \quad L_{D'} : y = k - \frac{a^2}{c}$$



b) Forma canónica: Es una elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje Y, su ecuación es :



Ecuación canónica de la Elipse:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_D : y = \frac{a^2}{c}$$

$$L_{D'} : y = \frac{-a^2}{c}$$

Forma general de la Elipse

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde A y B tienen el mismo signo.

Además: $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$.

- * A esta ecuación se le conoce como forma general.
- * Para obtener la ecuación de una elipse en su forma ordinaria simplemente se completa cuadrados a la forma general.

EJERCICIO EXPLICATIVO

Dada la ecuación de la elipse, verificar que el eje focal es paralelo al eje x

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$$

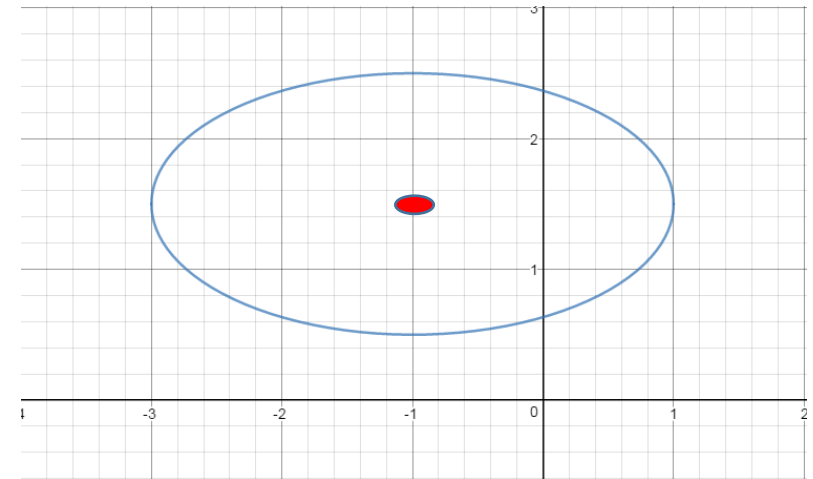
Solución:

Agrupamos y completamos cuadrados:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$$

$$\underline{x^2} + 2x + 1 + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + \frac{9}{4}(4)$$

$$(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$



$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1^2} = 1$$

Por lo tanto la elipse tiene su eje focal paralelo al eje x. Porque: “a” es denominador de x

Siendo: $a = 2 \wedge b = 1$.

Ejemplo 46. Bosqueje la gráfica de la ecuación $5x^2 + 9y^2 + 50x - 18y + 89 = 0$ y determine los vértices, focos, lado recto y la ecuación de las rectas directrices.

SOLUCIÓN:

$$5(x^2 + 10x) + 9(y^2 - 2y) = -89$$

$$5(x + 5)^2 + 9(y - 1)^2 = -89 + 125 + 9$$

$$5(x + 5)^2 + 9(y - 1)^2 = 45$$

$$\frac{5(x + 5)^2}{45} + \frac{9(y - 1)^2}{45} = \frac{45}{45}$$

$$\frac{(x + 5)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{5} = 1$$

$$a^2 = 9 \quad b^2 = 5 \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = 3 \quad b = \sqrt{5} \quad 9 = 5 + c^2$$

$$c = 2$$

$$C(-5, 1)$$

$$V_1(-5 - 3, 1) = (-8, 1)$$

$$V_2(-5 + 3, 1) = (-2, 1)$$

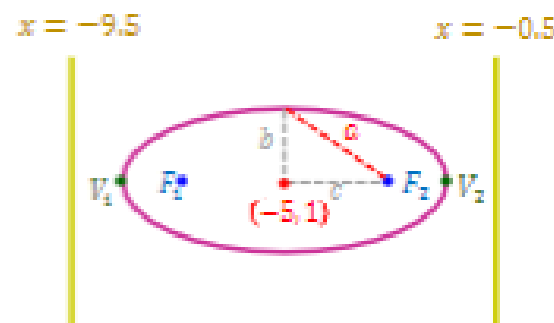
$$F_1(-5 - 2, 1) = (-7, 1)$$

$$F_2(-5 + 2, 1) = (-3, 1)$$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{10}{3}$$

$$L_0: \frac{a^2}{c} = \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow x = -5 \pm 4.5$$

$$x = -9.5 \quad x = -0.5$$



Ejemplo 47. Bosqueje la gráfica de la ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$ y determine los vértices, focos, lado recto y la ecuación de las rectas directrices.

SOLUCIÓN:

$$25(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) = 156$$

$$25(x + 2)^2 + 16(y - 3)^2 = 156 + 100 + 144$$

$$25(x + 2)^2 + 16(y - 3)^2 = 400$$

$$\frac{25(x + 2)^2}{400} + \frac{16(y - 3)^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 & b^2 &= 16 & a^2 &= b^2 + c^2 \\ a &= 5 & b &= 4 & 25 &= 16 + c^2 \\ & & & & c &= 3 \end{aligned}$$

$$C(-2, 3)$$

$$V_1(-2, 3 + 5) = (-2, 8)$$

$$V_2(-2, 3 - 5) = (-2, -2)$$

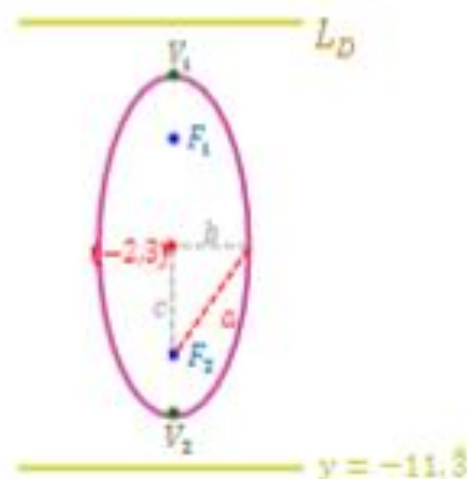
$$F_1(-2, 3 + 3) = (-2, 6)$$

$$F_2(-2, 3 - 3) = (-2, 0)$$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}$$

$$L_D: \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3} = 8.\hat{3} \Rightarrow y = 3 \pm 8.\hat{3}$$

$$y = -11.\hat{3} \quad y = -5.\hat{3}$$



Desaprende lo que te limita

3 FINALMENTE



IMPORTANTE

1. Los elementos principales para la ecuación de la elipse son el centro y 2 valores " a " y " b ".
2. " a " es la distancia del centro al vértice, " c " la distancia del centro al foco.
3. Por Pitágoras se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$



Excelente tu participación

Triunfo porque no pongo excusas, pongo soluciones.



Esta sesión quedará grabada para tus consultas.



PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de esta sesión y práctica con la tarea.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

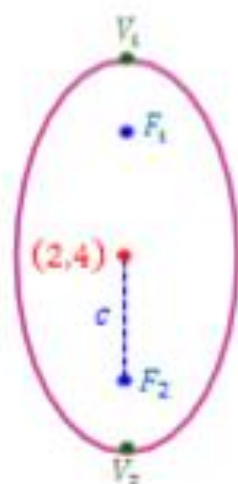
EJERCICIOS EXPLICATIVOS



Universidad
Tecnológica
del Perú

1. El centro de la elipse tiene por coordenadas $C(2, 4)$. Si la distancia del centro a los focos es $3u$, su excentricidad $1/3$ y la elipse es de eje vertical, determine su ecuación ordinaria.

SOLUCIÓN:



$$c = 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

$$a = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$81 = b^2 + 9$$

$$b^2 = 72$$

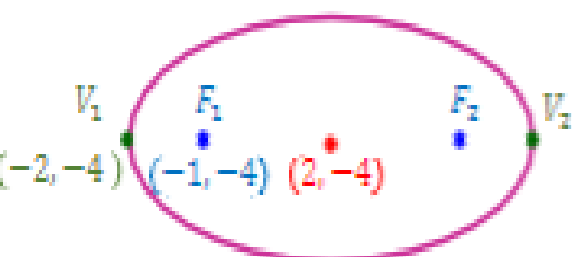
$$\frac{(x-2)^2}{72} + \frac{(y-4)^2}{81} = 1$$

RPTA: $\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{72} + \frac{(y-4)^2}{81} = 1$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$ respectivamente. Determine la ecuación general de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la longitud del lado recto.

SOLUCIÓN:



$$a = 4 \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = 3 \quad 16 = b^2 + 9$$
$$b^2 = 7$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$$

$$\frac{7(x-2)^2 + 16(y+4)^2}{112} = 1$$

$$7x^2 - 28x + 28 + 16y^2 + 128y + 256 = 112$$

$$\varepsilon: 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 = 0$$

RPTA:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Eje menor: } 2b = 2\sqrt{7}$$

$$\text{LR: } \frac{2b^2}{a} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\varepsilon: 7x^2 + 16y^2 - 28x + 128y + 172 = 0$$

EJERCICIO RETO

Determine los vértices, los focos, extremos del eje normal, el lado recto, excentricidad y las rectas directrices de $x^2 + 4y^2 + 6 = 12y - 2x$

$$C(-1; \frac{3}{2}) \quad a = 2 \quad b = 1 \quad // \text{eje } X$$



Universidad
Tecnológica
del Perú

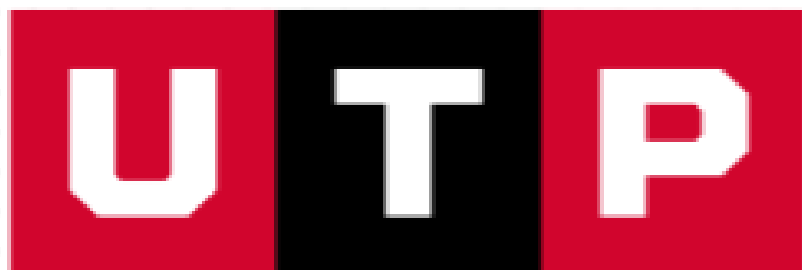
EJERCICIO PROPUESTO

1.- Determine en la ecuación:

$$9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 = 0$$

a) La grafica b) vértices c) focos d) lado recto e) extremos del lado recto) excentricidad

2.- Los focos de una elipse son los puntos $F(3, 8)$ y $F(3, 2)$ y la longitud de su eje menor es 8. Determine la ecuación de la elipse.



**Universidad
Tecnológica
del Perú**