

Introducción a la Matemática para la Ingeniería

Unidad:

Las Cónicas y números complejos

Docente: Jaime Fernández Caycho



Al finalizar la unidad, el estudiante utiliza los conceptos de las cónicas y los números complejos en problemas contextualizados sobre ciencia, tecnología e ingeniería.



Importancia

Las cónicas son muy empleado en el diseño de antenas, construcciones y edificaciones . También pueden ayudar a describir movimientos de cuerpos en el espacio (astronomía) determinando su trayectoria

Por otra parte los números complejos tienen relevancia en la ingeniería, especialmente para la electrónica y las telecomunicaciones así como en el estudio de las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

Contenido general



- Las cónicas
- Parábola y Elipse
- Números Complejos

Las Cónicas y los Números Complejos

- Lugar geométrico y Circunferencia
- Parábola y Elipse
- Números complejos

Lugar geométrico y Circunferencia

Lugar Geométrico.

Circunferencia.

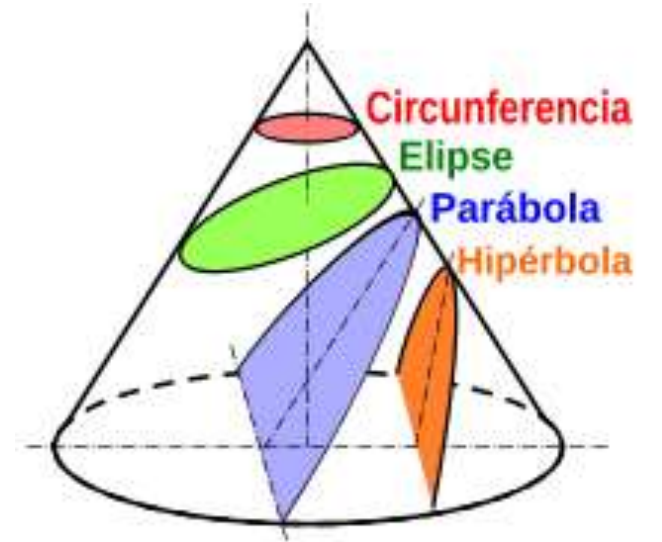
Elementos.

Ecuaciones de la Circunferencia.

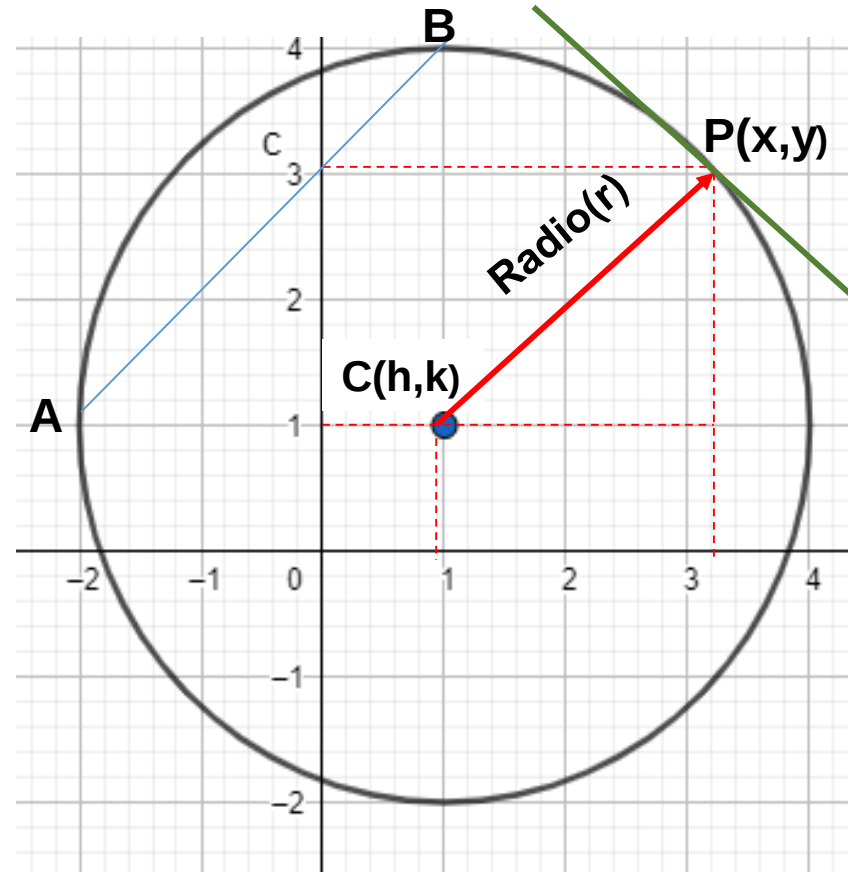
Distancia de un punto a la circunferencia.

Lugar Geométrico

Es el conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada condición



La Circunferencia



Elementos

Centro $C(h,k)$

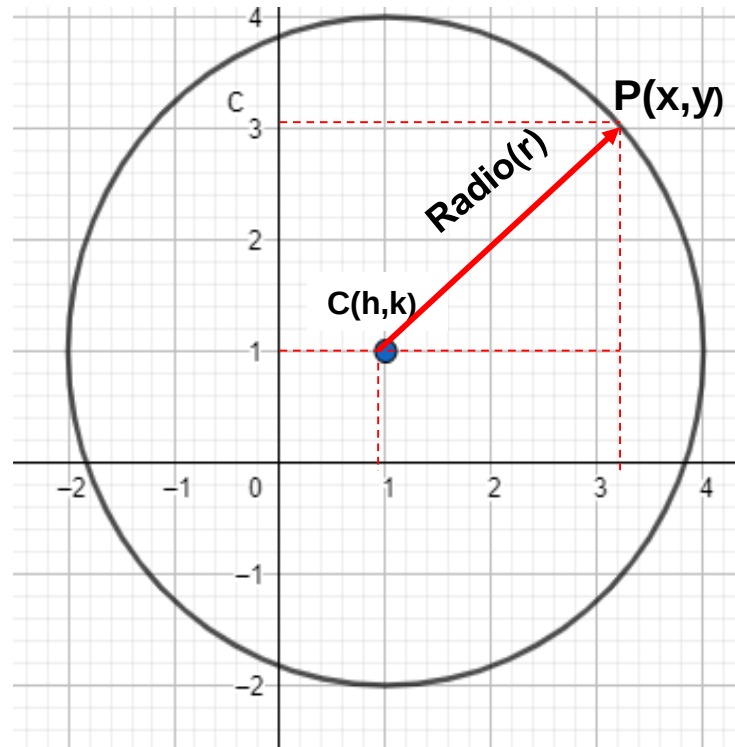
Radio (r) = CP

Cuerda = AB

Punto de tangencia : P

Recta tangente : L

Ecuaciones de la Circunferencia



Ecuación Ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación Canónica

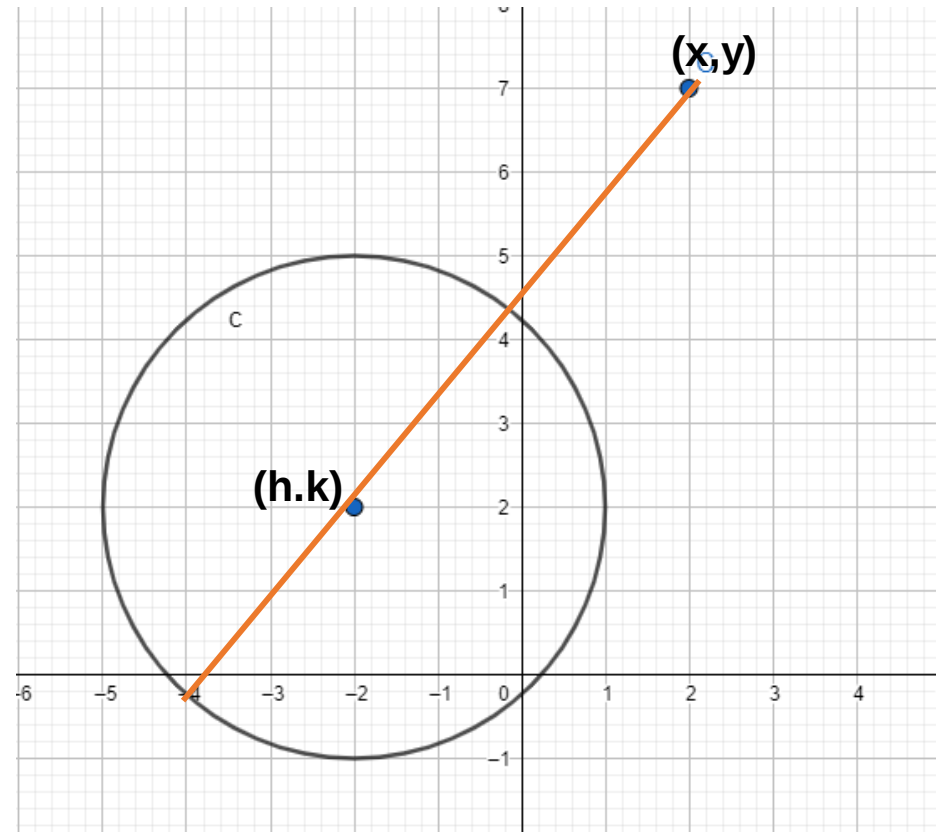
$$C = (0, 0)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

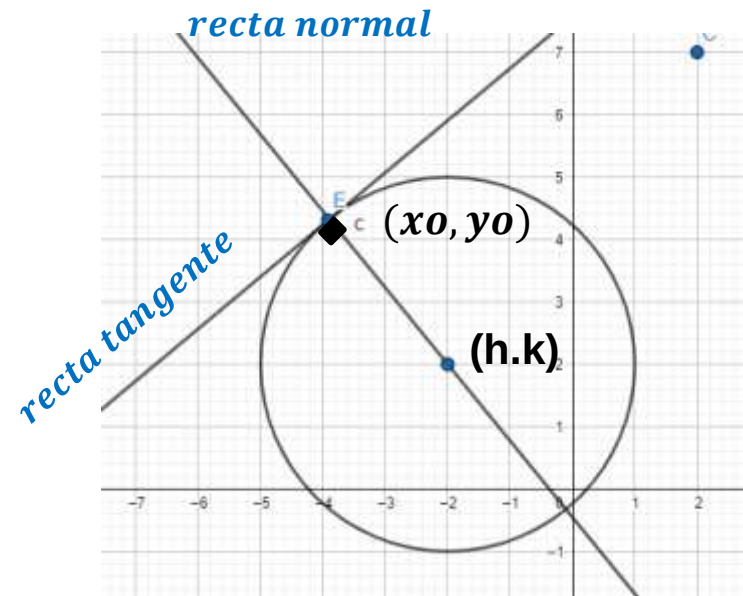
Distancia de un punto a una circunferencia



Distancia mínima $D_{min} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} - r$

Distancia máxima $D_{max} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} + r$

Recta tangente a la Circunferencia

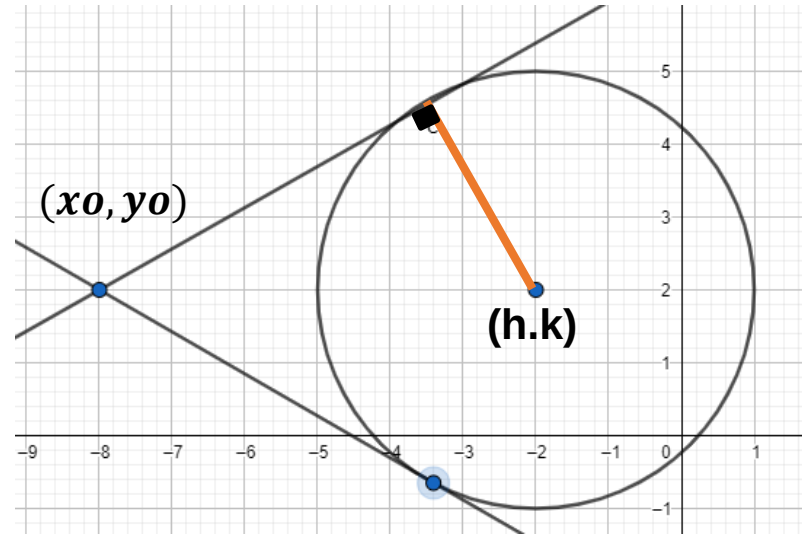


Se cumple
 $\text{radio} \perp \text{recta tangente}$

Ecuación recta tangente $L_T : y - y_0 = -\left(\frac{x_0 - h}{y_0 - k}\right)(x - x_0)$

Ecuación recta normal $L_N : y - y_0 = \left(\frac{y_0 - k}{x_0 - h}\right)(x - x_0)$

Recta tangente desde un punto exterior a la Circunferencia



Determina el punto de tangencia (o puntos de tangencia)

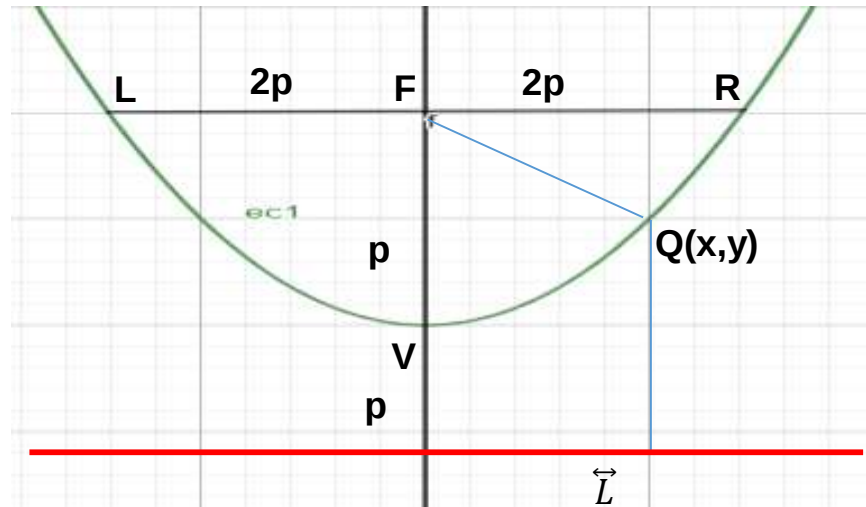
Calcula la pendiente de la recta normal (CP)

Determina la ecuación de la recta tangente

Parábola y elipse .Elementos

- Parábola. Elementos
- Ecuación ordinaria, Ecuación canónica y Ecuación General. Gráficas considerando el eje focal paralelo al eje "x" y el eje "y".
- Elipse. Elementos
- Ecuación ordinaria, Ecuación canónica y Ecuación General.
- Gráficas considerando el eje focal paralelo al eje "x" y el eje "y".

Parábola . Elementos



Vértice (V)

Foco (F)

Extremos del lado Recto
L y R

Eje de Simetría

Recta Directriz

Excentricidad ($e=1$)

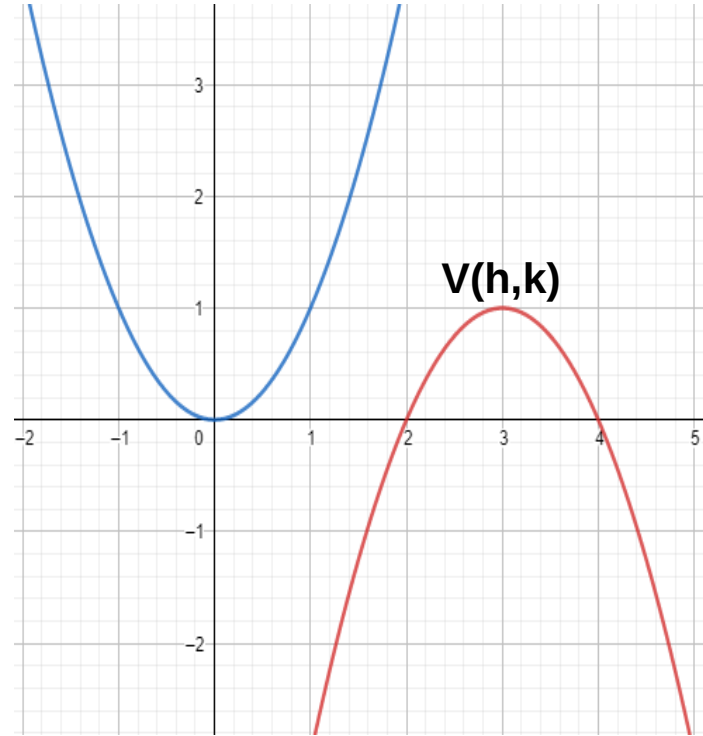
Condiciones Básicas

$$d(Q, F) = d(Q, \vec{L}) = 2p$$

$$d(V, F) = d(V, \vec{L}) = p$$



Parábola con eje de Simetría Paralelo al Eje Y



Ecuación Ordinaria

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ecuación Canónica

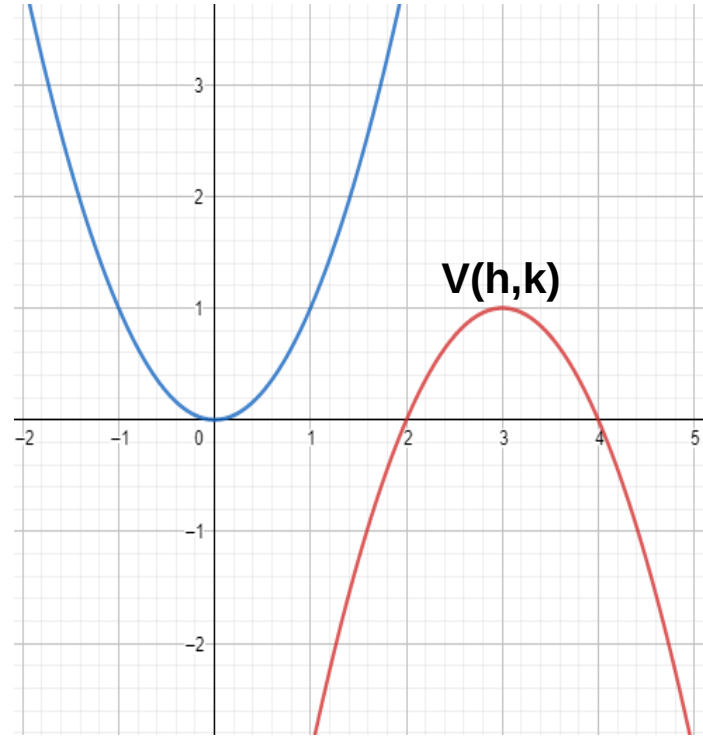
Si $(h,k) = (0,0)$

$$x^2 = 4py$$

Ecuación General

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola con eje de Simetría Paralelo al Eje X



Ecuación Ordinaria

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación Canónica

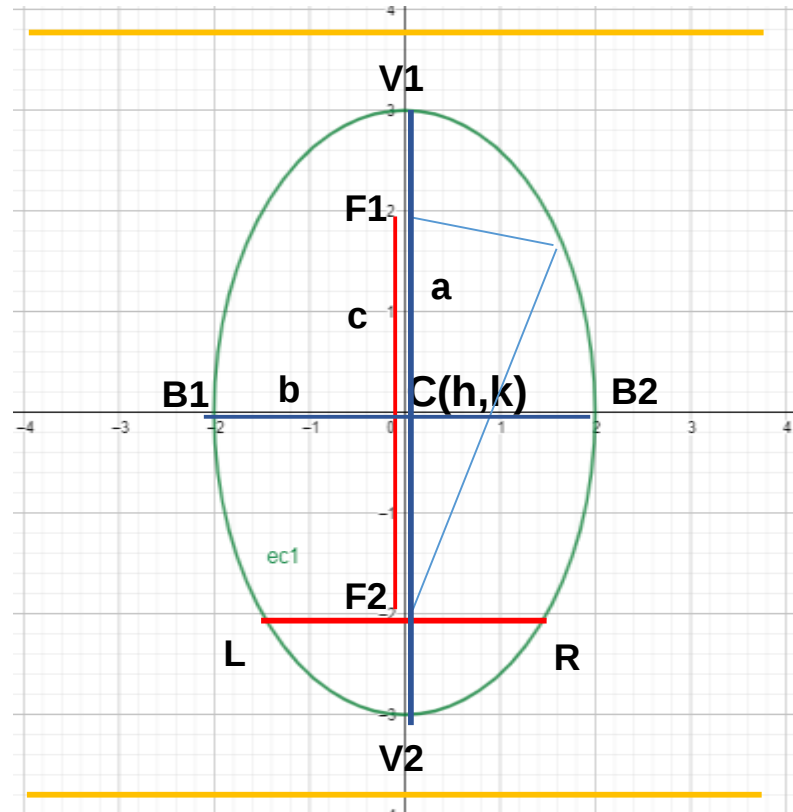
Si $(h,k) = (0,0)$

$$y^2 = 4px$$

Ecuación General

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Elipse. Elementos



Centro (h,k)

Vértices (V_1, V_2)

Focos (F_1, F_2)

Extremos lado recto $|LR| = \frac{2b^2}{a}$
L y R

Eje Mayor $\overline{V_1V_2} = 2a$

Eje Menor $\overline{B_1B_2} = 2b$

Distancia focal $\overline{F_1F_2} = 2c$

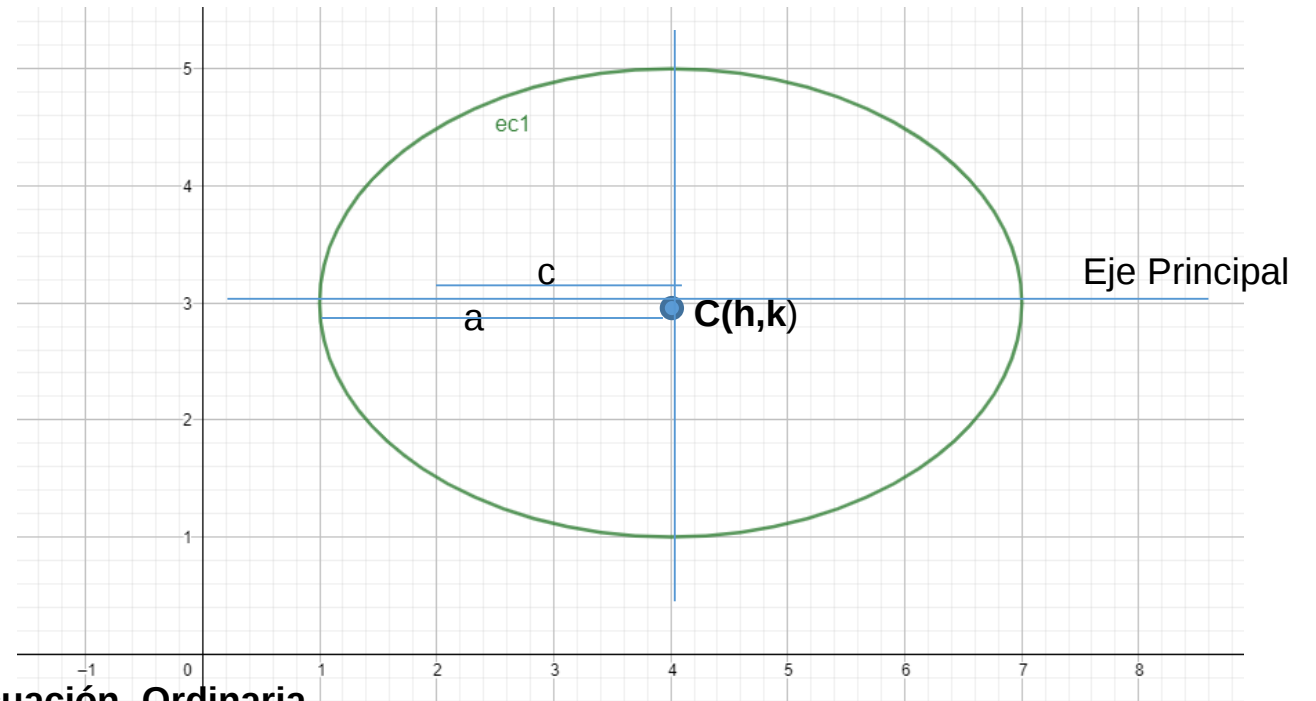
Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Rectas Directrices

Relación básica $b^2 + c^2 = a^2$



Elipse con eje Principal paralelo al eje X



Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Directriz

$$x = h \pm \frac{a^2}{c}$$

Ecuación General

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Coordenadas de los Focos y Vértices

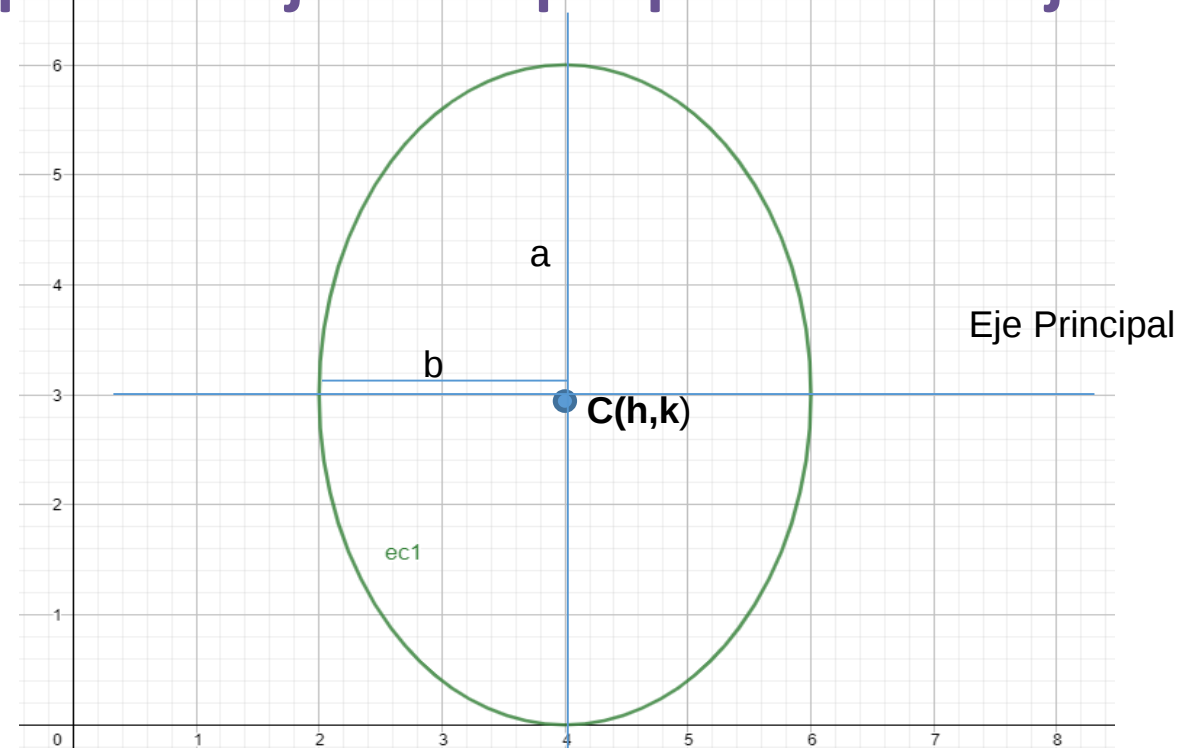
$$F_1(h+c; k) \quad F_2(h-c; k)$$

$$V_1(h+a; k) \quad V_2(h-a; k)$$

Ecuación Canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse con Eje Principal paralelo al eje Y



Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Ecuación Directriz

$$y = k \pm \frac{a^2}{c}$$

Ecuación General

$$Bx^2 + Ay^2 + Dx + Cy + E = 0$$

Coordenadas de los Focos y Vértices

$$F_1(h; k + c) \quad F_2(h; k - c)$$

$$V_1(h; k + a) \quad V_2(h; k - a)$$

Ecuación Canónica

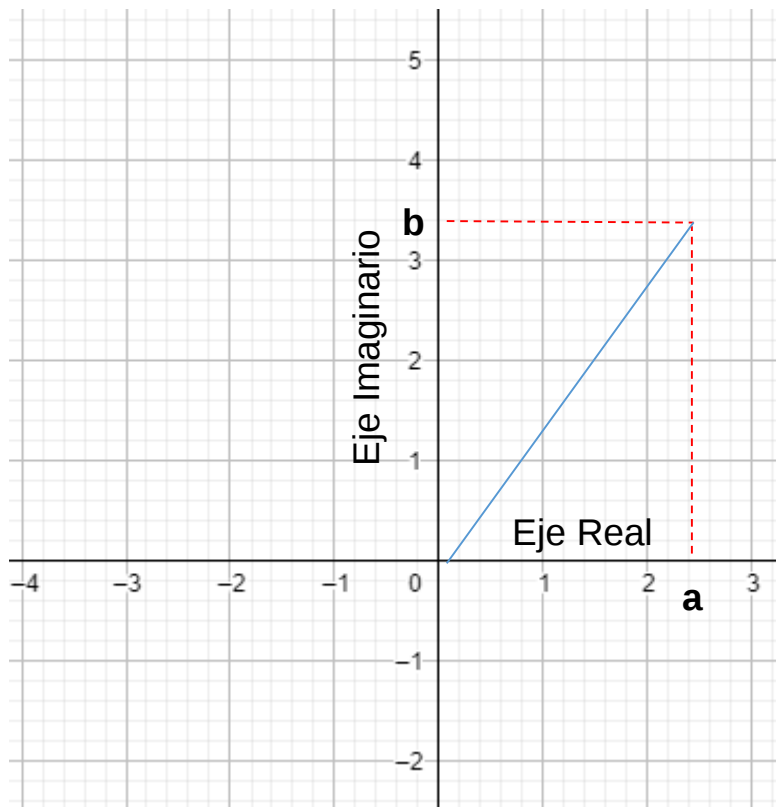
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Números complejos

- Definición. Operaciones con números complejos.
- Números Complejos en su forma Polar
- Forma Trigonométrica

Números Complejos

El Plano complejo o plano de Gauss



Forma binómica

$$Z = a + bi$$

Complejo conjugado

$$\bar{Z} = a - bi$$

Complejo opuesto

$$-Z = -a - bi$$

Operaciones con números complejos

Dados los complejos $Z = a + bi$ $W = c + di$

Suma $Z + W = (a + c) + (b + d)i$

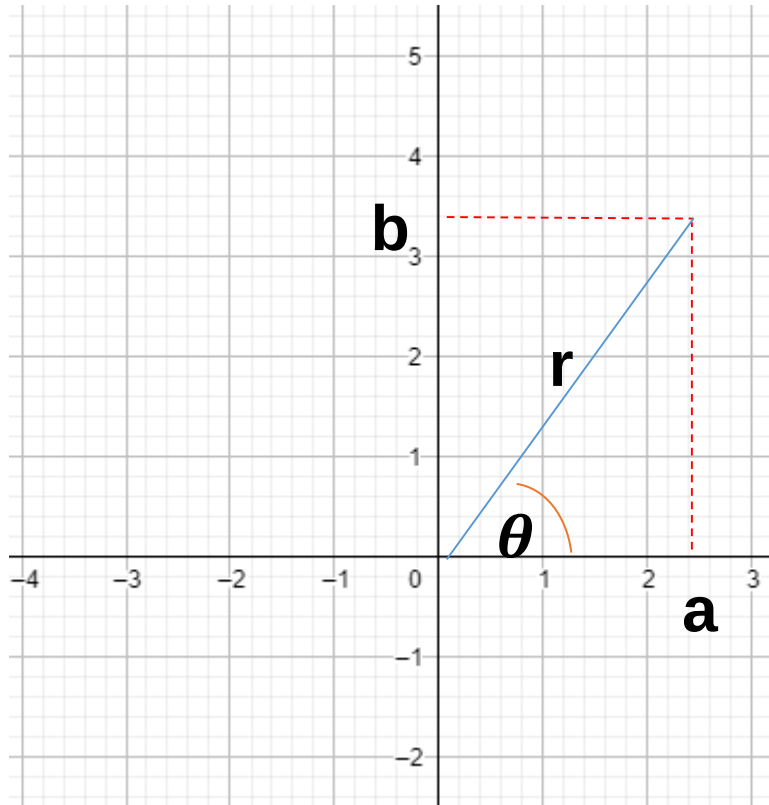
Resta $Z - W = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación $Z.W = (ac - bd) + (bc + ad)i$

División $\frac{Z}{W} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \left(\frac{c - di}{c - di} \right)$

Potenciación $\frac{Z}{W} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \left(\frac{c - di}{c - di} \right)$

Forma Polar de un Número Complejo



Módulo

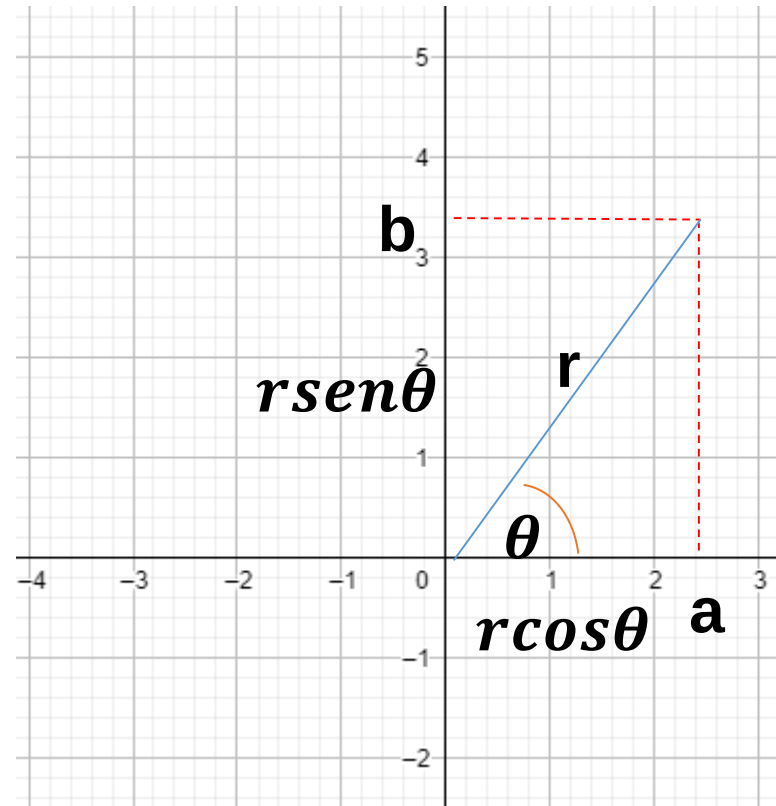
$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Z = r_{\theta}$$

Forma Trigonométrica de un complejo



$$Z = r \operatorname{cis} \theta$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$Z = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$Z = a + i b$$



Conclusiones

- Determinar las ecuaciones de lugares geométricos como la circunferencia, la parábola y la elipse requiere identificar sus elementos básicos como focos, vértice, centro, radio los cuales confluyen en la ecuación particular cuya aplicabilidad se observa en el arte, arquitectura y diseño de construcciones así como en la descripción de trayectorias de cuerpos celestes.
- Los números complejos son el resultado de una mezcla del campo real y de las cantidades imaginarias. Su representación ayuda a solucionar ecuaciones fuera del contexto real y que son muy útiles en los campos de la electrónica. A las representaciones polar y trigonométrica podemos añadir la forma exponencial donde se juntan los tres números trascendentales : $e^{i\pi}$

Gracias

Docente: Jaime Fernández Caycho