INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Determinantes Matriz inversa Solución de sistemas lineales por Cramer

UTP Universidad Tecnológica del Perú

¿Qué hemos visto en nuestro material de la sesión virtual?

- Matrices
- Ejercicios de matrices

Universidad Tecnológica del Perú

¿Cuáles son las ideas principales de esta sesión?

“Levanta la mano” para comentar tu duda

UTP Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios aplicados a la ingeniería donde utiliza conceptos y propiedades de matrices, determinantes e inversa.

Universidad Tecnológica del Perú

¿Que entendemos por determinantes de una matriz?

¿Cómo se halla el determinante de una matriz?

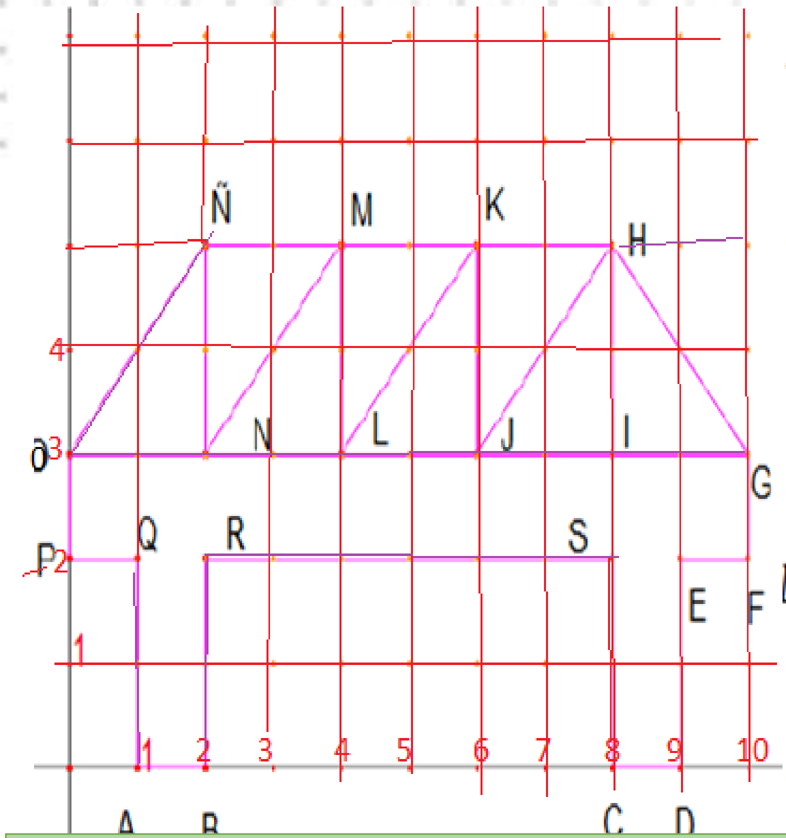
¿Qué métodos existen para hallar el determinante?

¿Cuáles son sus propiedades?

¿En que utiliza el determinante de una matriz?

Universidad Tecnológica del Perú

- UTILIDAD



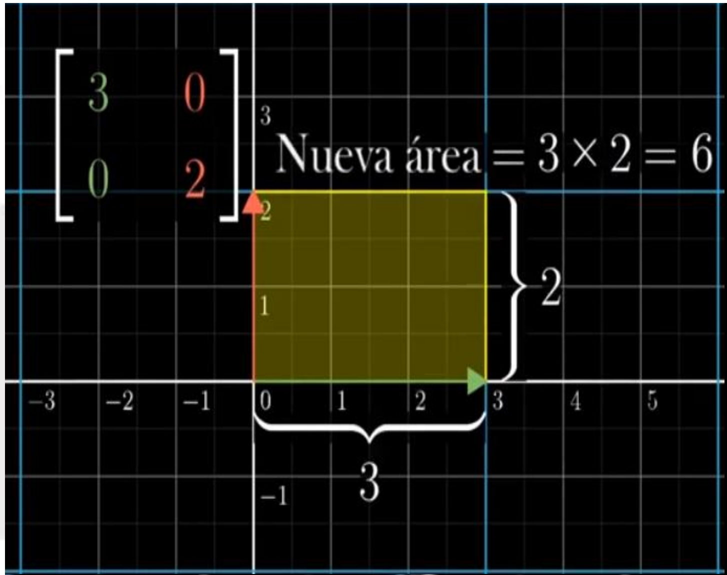
$$A = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$$

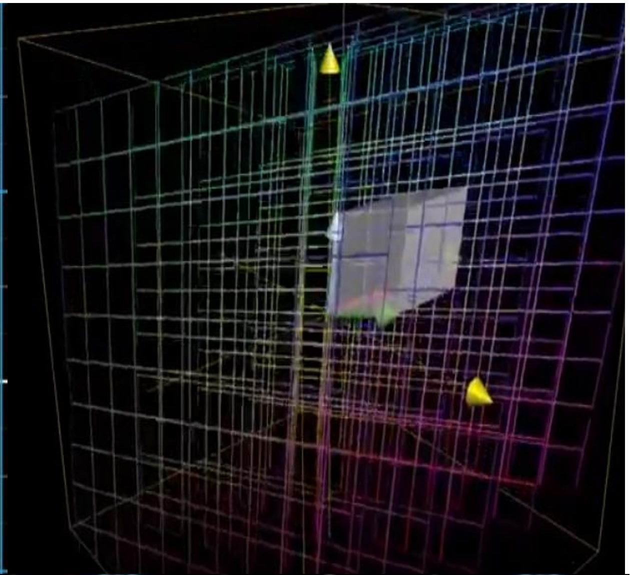
$$B = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$$

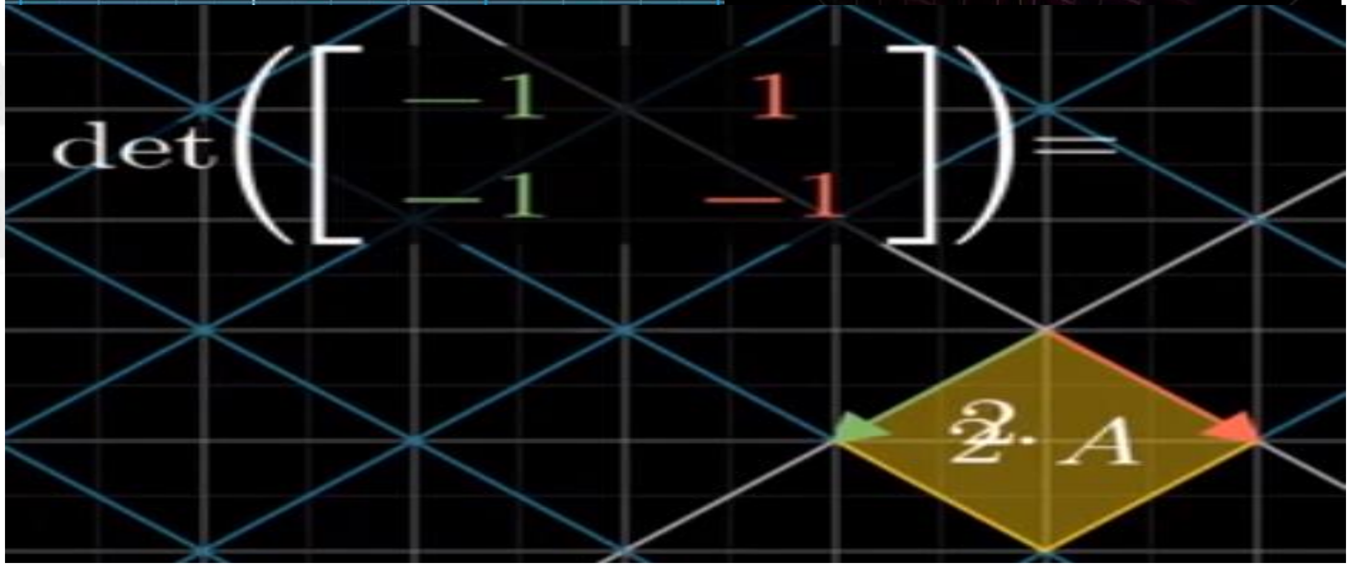
$$C = \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$







Trasformación lineal de una matriz a determinante. El área lo observamos en el plano cartesiano.
Grafico matriz cuadrada de 2 x2 y 3x3

DETERMINANTE (orden 1 y 2)

DE ORDEN 1

Si $A = |a_{11}|$, entonces

$$|A| = a_{11}$$

DE ORDEN 2

Si $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$|A| = |-3| = -3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2) - (3)(-5)$$

$$= 17$$

¡ATENTO!

EJEMPLO 1

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. Calcular la $|A|$; $|B|$ y $|AB|$.

$$|A| = 7 - 8 = -1$$

$$|B| = -10 - (-21) = 11$$

$$|AB| = |A||B| = -1(11) = -11$$

Método de Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se colocan las dos primeras filas o las dos primeras columnas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se multiplican los elementos de las tres diagonales principales y se suman

$$(2)(2)(3) + (1)(3)(1) + (1)(3)(4) = 27$$

$$27 - 35 = -8$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se multiplican los elementos de las tres diagonales secundarias y se suman

$$(1)(2)(1) + (4)(3)(2) + (3)(3)(1) = 35$$

Es el Determinante

Determinante de una matriz de orden 3

Se define el cofactor correspondiente al elemento $a_{i,j}$, que se denota por $A_{i,j}$, como el número dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^2(28-30) = (+1)(-2) = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{(-1)^{1+1}} & \boxed{(-1)^{1+2}} & \boxed{(-1)^{1+3}} & \dots (-1)^{1+j} \\ \boxed{(-1)^{2+1}} & \boxed{(-1)^{2+2}} & \boxed{(-1)^{2+3}} & \dots (-1)^{2+j} \\ \boxed{(-1)^{3+1}} & \boxed{(-1)^{3+2}} & \boxed{(-1)^{3+3}} & \dots (-1)^{3+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{i+1} & (-1)^{i+2} & (-1)^{i+3} & \dots \boxed{(-1)^{i+j}} \end{bmatrix}$$

POSITIVO NEGATIVO

$$A = \begin{bmatrix} (+1) & (-1) & (+1) & (\dots) \\ (-1) & (+1) & (-1) & (\dots) \\ (+1) & (-1) & (+1) & (\dots) \\ (\vdots) & (\vdots) & (\vdots) & (\dots) \end{bmatrix}$$

POSITIVO NEGATIVO

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE COFACTORES

RESOLVER:

Se elige una fila o una columna cualquiera de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

1 $Elegimos\ la\ primera\ columna$

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Elegimos el primer elemento y eliminamos la fila y la columna

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = + \ 1\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (4x4) - (1x3) = +13$$

4 Elegimos el segundo elemento y eliminamos la fila y la columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = - \ 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -2\big((2x4) - (3x3)\big) = +2$$

6 Elegimos el tercer elemento y eliminamos la fila y la columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = + \ 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = 2\big((2x1) - (4x3)\big) = -20$$

Det = 13 + 2 – 20 = - 5

Determinantes por el Método de Cofactores

Ejemplos:

Elegimos una fila.

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (+1)(1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}(-1)(2)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(+1)(-3)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=(1)(15-12)-2(12+2)-3(24+5)=3-28-87= -112$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Casos en que un determinante es igual a CERO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cuando todos Los elementos de una fila son ceros

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ \pi & 8 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Cuando dos filas o columnas tienen los mismos elementos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Cuando dos filas paralelas son proporcionales

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Fila 1 + Fila 2 = Fila 3

Dos métodos tienen gran aplicación para hallar determinantes: Por Operaciones Elementales y por Cofactores

OPERACIONES ELEMENTALES:

Operaciones	Notación
1. Intercambiar los Fi y Fj	$Fi \leftrightarrow Fj$
2. Multiplicar la fila Fi por un escalar "λ" $\neq 0$	$\lambda . Fi$
3. Sumar K veces la fila Fi a otra fila. (La fila Fj permanece igual)	$Fj + KFi$

Dos métodos tienen gran aplicación para hallar determinantes:
Por Operaciones Elementales y por Cofactores

OPERACIONES ELEMENTALES:

$$\begin{array}{l} \textit{Primera fila } f_1 \\ \textit{Segunda fila } f_2 \\ \textit{Tercera fila } f_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad f1 = f_1 + f_2 \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad f3 = f_3 - f_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sumar a una fila otra fila

Restar a una fila otra fila

$$\begin{array}{rccc} f1 = & 1 & 2 & 3 \\ f2 = & 2 & 4 & 1 \\ \hline & 3 & 6 & 4 \end{array}$$

Se puede hacer también por columnas

OPERACIONES ELEMENTALES:

$$\begin{array}{l} \textit{Primera fila } f_1 \\ \textit{Segunda fila } f_2 \\ \textit{Tercera fila } f_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{3f_1} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{f_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Multiplicar a una fila por un real diferente de cero

$$\mathbf{f_1 x f_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Intercambiar filas

Se puede hacer también por columnas

SEGUNDA PROPIEDAD DE OPERACIONES ELEMENTALES

Se trata de convertir la matriz a una del tipo triangular superior a base de las tres operaciones elementales anteriores pero debe tener en cuenta que:

Si suma o resta entre filas no se altera el determinante.

Si multiplica por un real a cualquier fila entonces al final debe dividir el determinante por el real.

Si intercambia filas entonces el determinante cambia de signo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ Si a base de operaciones elementales la convierte en Triangular superior $$\begin{bmatrix} a & m & n \\ 0 & b & g \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$Det = a.b.c$$

DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR a 3

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \quad \textbf{1}\ \ 2.f_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \quad \textbf{2}\ \ -f_1 + f_2 = f_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\textbf{3}\ \ f_3 - f_1 \rightarrow \mathrm{f}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \quad \textbf{4}\ \ f_3 x f_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

A base de 4 operaciones elementales por filas la convirtió en triangular superior

$$Det = (2)(-1)(-5) = 10$$

Pero multiplico por 2 una fila $\Rightarrow$ $Det = \dfrac{10}{2} = 5$

Pero intercambio filas $\Rightarrow$ $Det = -5$ ***Rpta.***

Gauss se aplica a matrices de orden mayor a 3 para ver su utilidad

Determinante por el Método de Gauss

Ejemplo: Calcular el determinante por el método de cofactores:

Universidad Tecnológica del Perú

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \; \underset{F3 = -F_2 + F_3}{\overset{F4 = F_1 + F_4}{=}} \; \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} = (2).\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} -(3).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} + (0).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} - (0).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[-2.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right] = 2\,[-2(18+4) - 1(36-14) + 2(-8-14)]$$

$$= 2\,[-44 - 22 - 44] = -220$$

$$= -3\left[3.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right] = -3\,[66 + 44 - 88] = -66$$

Det = -220-66= -286

Si A es una matriz no singular de orden 2, su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$$

SI $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $ad-bc \neq 0$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=12-2=8$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

INVERSA MATRIZ de orden 2 por el método de la adjunta

INVERSA DE MATRIZ de orden 3

A es una matriz de orden 3, la adjunta es la transpuesta de su matriz de cofactores.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$$

Adj(A) = transpuesta de la matriz cofactores(A_C^T)

Ejemplo

Hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1º Hallando el determinante de A

$$|A| = \left| \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$|A| = (2+0-8)-(8+0-3) = -11$$

2º Hallando la matriz de cofactores de A

$$c_{11}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad c_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(-1)=1 \qquad c_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-8$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(-5)=5 \qquad c_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad c_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(-2)=2$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4 \qquad c_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-(2)=-2 \qquad c_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5$$

$$\therefore \quad A_C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -8\\ 5 & -3 & 2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

3º Hallando la adjunta de A

$$AdjA = A_C^T \quad \Rightarrow \quad AdjA = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4º La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Determine el valor de x si se cumple que:

$$\begin{vmatrix} 1-2x & 1 & 3 \\ x-3 & -5 & 0 \\ -4 & x-4 & 2 \end{vmatrix} = -22$$

Solución:

$$3\begin{vmatrix} x-3 & -5 \\ -4 & x-4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1-2x & 1 \\ -4 & x-4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1-2x & 1 \\ x-3 & -5 \end{vmatrix} = -22$$

$$3(x^2-7x+12-20)+2(-5+10x-x+3)=-22$$

$$3x^2-3x-6=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=2\ ;\ x=-1$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

$$\overset{A^{-1}}{} AX = \overset{A^{-1}}{} B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$Men(A) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} 8 & -11 & -7 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -11 & -4 & 5 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -11 & -4 & 5 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -16+6-16 \\ 22-12+20 \\ 14-6+12 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -26 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Método de Cramer

Universidad Tecnológica del Perú

Logro de la Sesión

Al finalizar la unidad el estudiante resuelve sistemas de ecuaciones lineales basado en la teoría de matrices y determinantes.

Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas , es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (1)$$

Donde:

x_j son las incógnitas, $j = 1,2,3,\dots,n$

a_{ij} son los coeficientes , $i = 1,2,3,\dots,m$

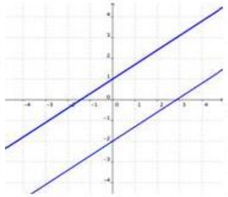
b_i son los términos independientes

Sistemas de ecuaciones lineales

UTP Universidad Tecnológica del Perú

Incompatibles o inconsistente

No tiene solución

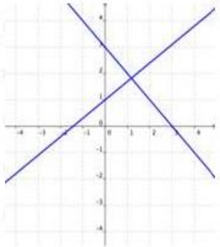


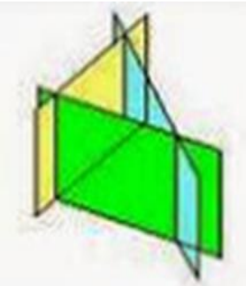
Compatibles o consistente

Tienen solución

Determinados

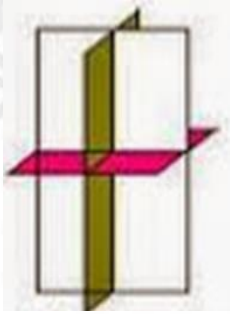
La solución es única

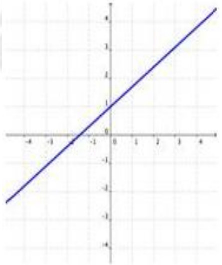




Indeterminados

Tienen infinitas soluciones





Tipos de Sistema de Ecuaciones Lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal
$$\begin{cases} X - Y + 3Z = 4 \\ X + 2Y - 2Z = 10 \\ 3X - Y + 5Z = 14 \end{cases}$$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{B}$$

1 MÉTODO MATRIZ INVERSA

Universidad Tecnológica del Perú

Este método se aplica sólo a sistemas de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

Dada la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

el método consiste en hallar X por:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

RECORDEMOS:

Si $|A| \neq 0$, entonces $\exists A^{-1}$ por lo tanto existe una solución única para $X = A^{-1} \cdot B$

Si $|A| = 0$, entonces $\nexists A^{-1}$ su solución no es única por lo que se usará otro tipo de solución.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$

Hallemos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

$$|A| = 18$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 8 & -11 & -7 \\ -2 & 14 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 32 - 20 + 56 \\ -44 + 140 - 14 \\ -28 + 40 + 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34/9 \\ 41/9 \\ 13/9 \end{bmatrix}$$

existe una solución única

REGLA DE CRAMER. Definición:

Un sistema es de Cramer si:

- El nº de ecuaciones es igual al nº de incógnitas
- $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Un sistema de Cramer es compatible determinado (S.C.D.) y su solución viene dada por las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Donde A_x, A_y, A_z,… son las matrices que resultan al sustituir la columna de la incógnita correspondiente (1ª, 2ª, 3ª,…) por la columna de los términos independientes

RESOLVER:

$$\begin{aligned} 2X - 3Y &= 2 \\ X + 2Y &= 0 \end{aligned}$$

EN FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

SOLUCIÒN:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SU DETERMINANTE PRINCIPAL= 7

Remplazamos la primera columna:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 \\ \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix}}{7} = \frac{4}{7}$$

Remplazamos la segunda columna:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}{7} = \frac{-2}{7}$$

Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 1 \\ 5x & +3y & +4z & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$MATRIZ\ PRINCIPAL \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$Hallar\ determinante\ de\ la\ matriz\ principal$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \ {}_1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1(8-3)-1(12-5)-1(9-10)=5-7+1=\text{-}1$$

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} x &+ y &- z &= 1 \\ 3x &+ 2y &+ z &= 1 \\ 5x &+ 3y &+ 4z &= 2 \end{aligned}$$

Término independiente

Solución:

Término independiente

Término independiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(8-3)-1(4-2)-1(3-4)}{-1} = \frac{5-2+1}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(4-2)-1(12-5)-1(6-5)}{-1} = \frac{2-7-1}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Término independiente

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(4-3)-1(6-5)+1(9-10)}{-1} = \frac{1-1-1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

6.Calcular el determinante de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Hallar la matriz inversa de A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

10. Resolver el SEL por la Regla de Cramer:

1. $\begin{cases} -9x - 5y = -10 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 5z = 12 \\ x + 4y + 25z = 36 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x + y + z - u = 4 \\ x + y - z + u = -4 \\ x - y + z + u = 2 \end{cases}$