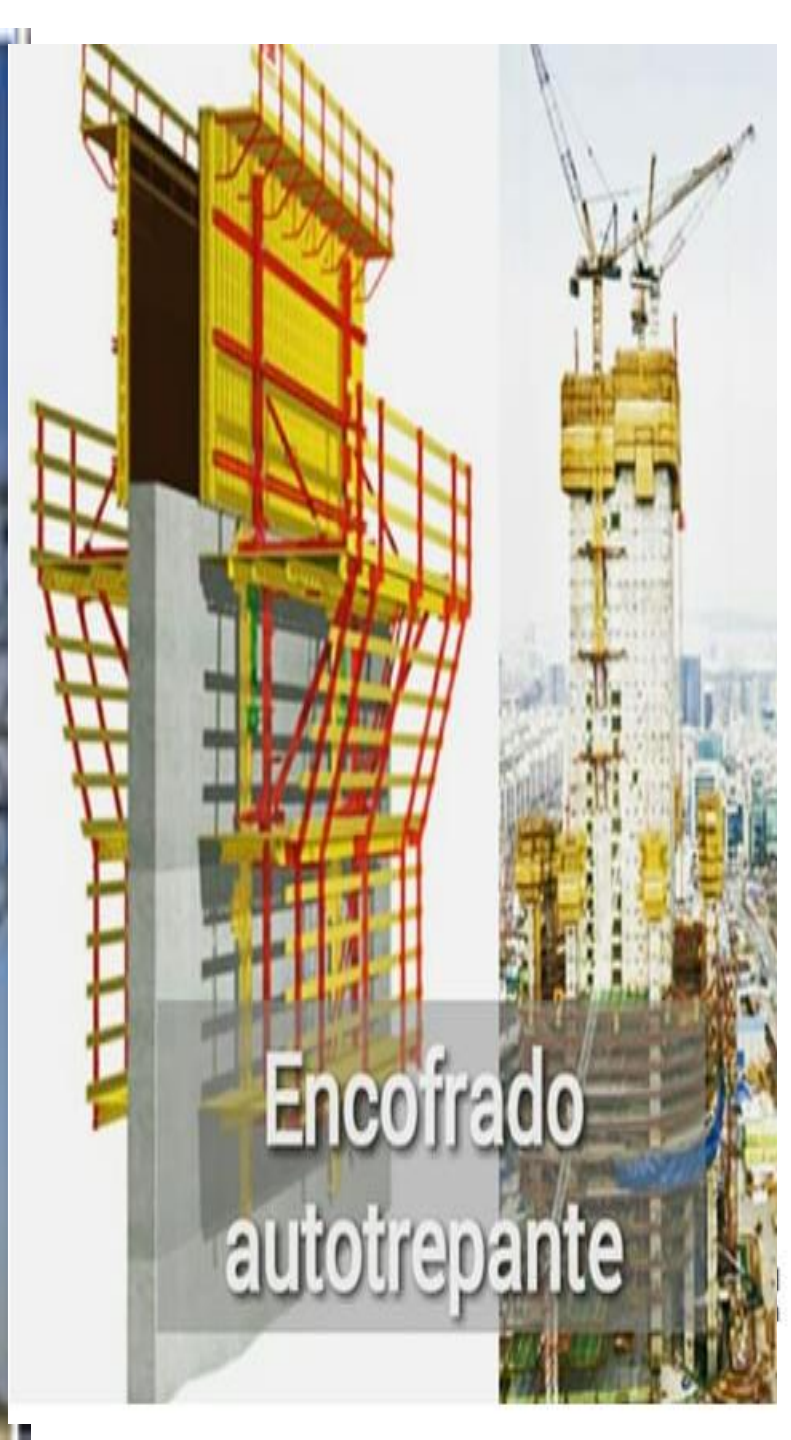




Encofrado
autotrepante

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Matriz



Universidad
Tecnológica
del Perú

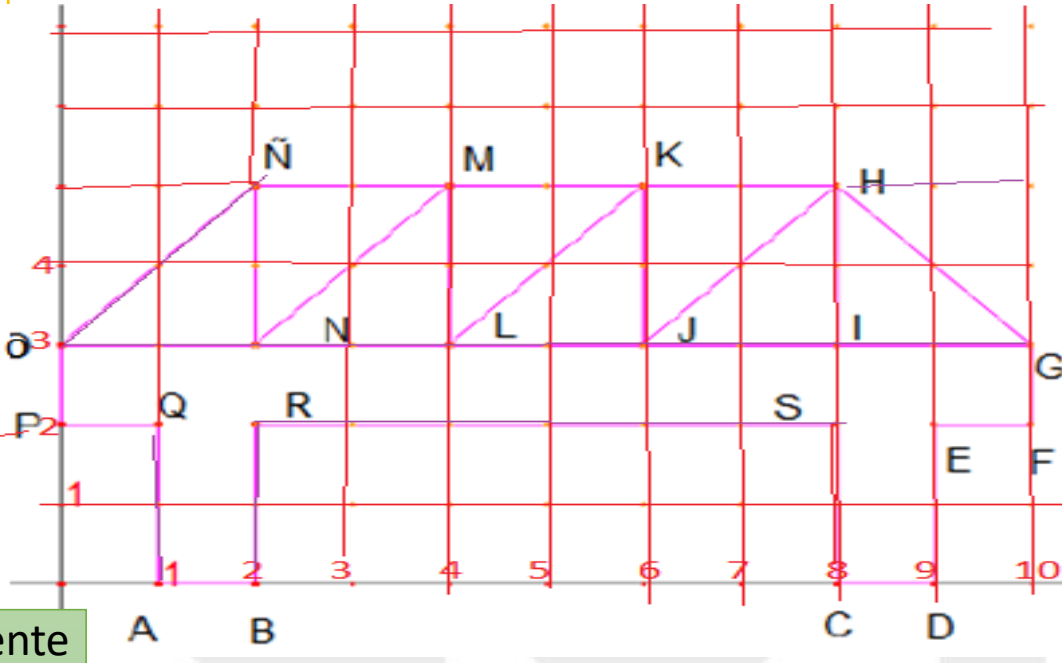
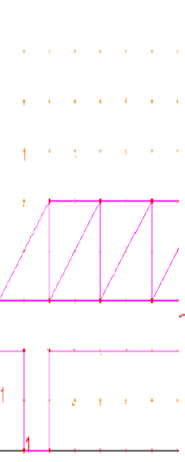
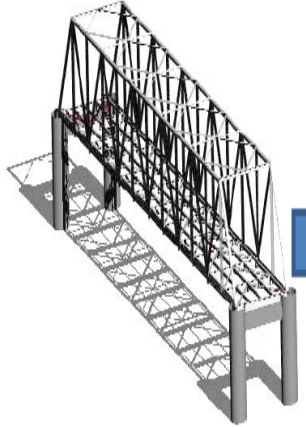
LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante ubica los elementos de una matriz por medio de la lectura de filas y columnas e identifica los diferentes tipos de matrices y realiza operaciones con matrices.



Universidad
Tecnológica
del Perú

UTILIDAD



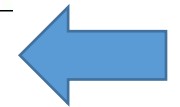
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

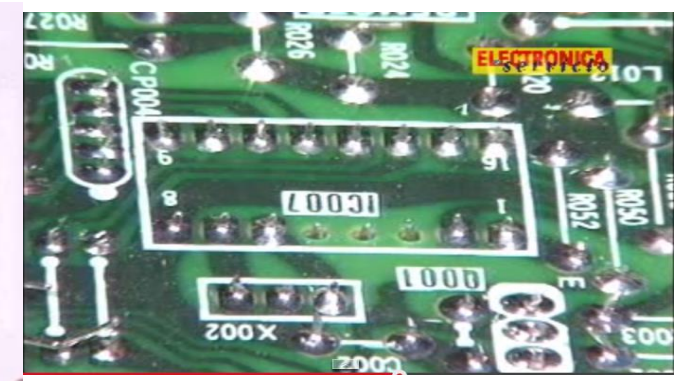
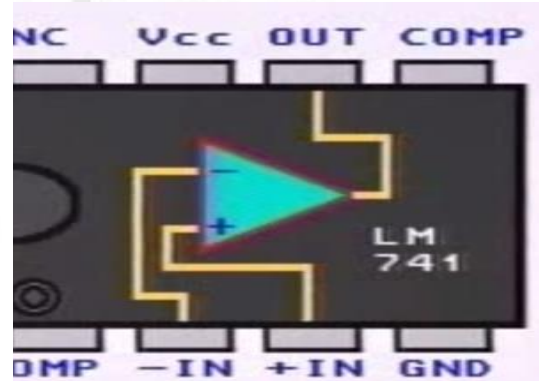
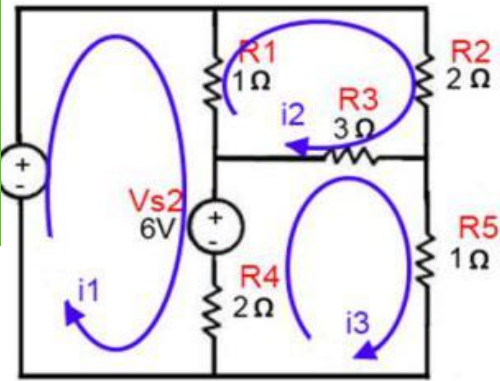
$$D = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



El ingeniero Civil diseña un puente a través de un programa teniendo en cuenta las coordenadas en forma matricial.

El ingeniero electrónico diseña la electricidad de un artefacto En forma matricial.



Carreras para

MATRICES

- Definición:
- Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Primera Fila

Segunda Fila

Tercera Fila

Cuarta Fila

Se representa
por una letra
mayúscula

Primera
Columna

Segunda
Columna

Quinta
Columna

4x5

Es el Orden
de la Matriz ,
indica el
tamaño

“a” Representa
los elementos
de la matriz A

$$A = [a_{i,j}]_{m \times n}$$

Fila

Columna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & \dots & 6 \\ 5 & 8 & 0 & \dots & 1 \\ 9 & 6 & 8 & \dots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 5 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$a_{1,3}$

$a_{3,2}$

Representa un elemento de la matriz A de la fila 3 y columna 2

MATRIZ DE “m” FILAS Y “n” COLUMNAS



TIPOS DE MATRICES

Matriz Fila

$$A = [-1 \quad 2 \quad 3 \quad -5 \quad 0]_{1 \times 5}$$

Matriz
Columna

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Matriz
Rectangular

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 12 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Matriz
Cuadrada

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

1 TIPOS DE MATRICES



Universidad
Tecnológica
del Perú

Matriz Nula

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Matriz
Triangular
Superior

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz
Diagonal

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz
Triangular
Inferior

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Matriz
Identidad (I)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

1 TIPOS DE MATRICES



Matriz
Transpuesta

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$



$$A^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Matriz Simétrica

$$A = A^t$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz Antisimétrica

$$A^t = -A$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \\ -7 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

TIPOS DE MATRICES



- Dadas las Matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

- Si estas son iguales, es decir : $A = B$, se verifican simultáneamente las condiciones :
 - I. A y B son de igual orden : $m \times n$
 - II. Los elementos correspondientes son iguales: $a_{ij} = b_{ij} ; \forall i; j$

Solo hay una condición para sumar y restar matrices **“Deben ser del mismo orden”**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \dots & 8 \\ 4 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 5 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \wedge \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & \dots & 0 \\ 3 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 3 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Adición: Se define : $A \pm B = [a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \dots & 8 \\ 4 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 5 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 7 & 1 & \dots & 0 \\ 3 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \pm 7 & 3 \pm 1 & \dots & 8 \pm 0 \\ 4 \pm 3 & 2 \pm 5 & \dots & 1 \pm 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 \pm 1 & 3 \pm 2 & \dots & 5 \pm 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SUMA: Elemento a elemento en la misma posición

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

RESTA: Elemento a elemento en la misma posición

$$A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Si: } k = 2 \text{ y } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3$$

Hallar: $k \cdot A$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

Si **A**, **B** son matrices $m \times n$, k_1 y k_2 son escalares:

(i) $(k_1 k_2) \mathbf{A} = k_1 (k_2 \mathbf{A})$

(ii) $k_1 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k_1 \mathbf{A} + k_1 \mathbf{B}$

(iii) $(k_1 + k_2) \mathbf{A} = k_1 \mathbf{A} + k_2 \mathbf{A}$

- Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A.B, si se verifica lo siguiente:

Número de columnas de “A” = número de filas de “B”

- Se define :

$$A_{m \times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p} \times n} = C_{m \times n}$$

En General: El producto matricial no es conmutativo.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean las matrices:

$$A = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad \dots \quad a_{1,n}] \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Definimos $A \times B$

$$[a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad \dots \quad a_{1,n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = [a_{11} \cdot b_{11} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}]$$

Ejemplo

$$[2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (2)(1) + (1)(1) + (3)(3) + (1)(2) + (0)(3) = 14$$

Se multiplica los elementos de la primera fila, de la primera matriz, con los elementos de las columnas que forman la segunda matriz.

Al acabar la primera fila se continúa con la segunda fila y así sucesivamente hasta completar todas las filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(3) + (1)(4) + (3)(1) & (2)(2) + (1)(1) + (3)(2) \\ (0)(3) + (2)(4) + (2)(1) & (0)(2) + (2)(1) + (2)(2) \\ (3)(3) + (2)(4) + (3)(1) & (3)(2) + (2)(1) + (3)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 10 & 6 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$$

2.3 ERROR EN LA POTENCIA

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3^2 & (-1)^2 \\ 5^2 & 2^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 25 & 4 \end{bmatrix}$$

NO se debe elevar cada término al cuadrado



$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 5 & -3 - 2 \\ 15 + 10 & -5 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 25 & -1 \end{bmatrix}$$

1. La manera de hallar el producto **AB** con **A** y **B** es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Producto fila por
columna

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = -1$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = -6$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Sea la matriz:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} / a_{ij} = 2i - j$$

• Calcular “ $3A - I$ ”

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 \\ 6-1 & 6-2 & 6-3 \end{pmatrix}$$

$$3A - I = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto escalar
Resta de matrices

$$3A - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 9 & 5 & 3 \\ 15 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Sea la matriz A. Hallar sus elementos:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} \quad \text{donde: } a_{ij} = \begin{cases} i + j; & i > j \\ 1; & i = j \\ i - j; & i < j \end{cases}$$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{i,j}]_{m \times n}$$

MATRIZ

$$i + j; \quad i > j$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{31} = 3 + 1 = 4$$

$$a_{32} = 3 + 2 = 5$$

$$1; \quad i = j$$

$$a_{11} = 1$$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{33} = 1$$

$$i - j; \quad i < j$$

$$a_{12} = 1 - 2 = -1$$

$$a_{13} = 1 - 3 = -2$$

$$a_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La matriz A es simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2x - y & 5 \\ 5 & 12 & 243 \\ x + 2y & 3^{y-z} & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular : $E = 2x + 3y + z$

SOLUCIÓN

CGT
Carreras para
gente que trabaja

MATRIZ SIMÉTRICA

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2x-y & 5 \\ 5 & 12 & 243 \\ x+2y & 3^{y-z} & 4 \end{bmatrix}$$

$$2x - y = 5 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$x + 2y = 5 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$2x - y = 5$$

$$-2x - 4y = -10$$

$$-5y = -5$$

$$y = \frac{-5}{-5} = 1$$

Para hallar x en la ecuación 2
reemplazamos el valor de y

$$x + 2(1) = 5$$

$$x = 5 - 2 \rightarrow x = 3$$

$$E = 2x + 3y + z$$

Para hallar z

$$3^{y-z} = 243$$

$$3^{1-z} = 3^5$$

$$1 - z = 5$$

$$1 - 5 = z$$

$$-4 = z$$

$$E = 2x + 3y + z$$

$$x = 3$$

$$y = 1$$

$$-4 = z$$

$$E = 2(3) + 3(1) - 4$$

$$E = 6 + 3 - 4 = 5$$

$$E = 5$$

Carreras para
gente que trabaja

5. Si A es una matriz anti simétrica definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a - b & d & c \\ a & b + 1 & -4 \\ e & 4 & c - 2 \end{pmatrix}, \text{ entonces el valor}$$

$$\text{de } T = a + b + c + d + e$$

SOLUCION

$$b + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad b = -1$$

$$a - b = 0 \quad \rightarrow \quad a - (-1) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1 \quad \rightarrow \quad d = 1$$

$$c - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad c = 2 \quad \rightarrow \quad e = -2$$

$$T = a + b + c + d + e$$

$$T = -1 - 1 + 2 + 1 - 2 = -1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Construya una matriz

$$M = [m_{ij}]_{3 \times 2} / m_{ij} = \begin{cases} 3^{i+j} & ; i < j \\ i^2 + j^2 & ; i = j \\ 2^{i-j} & ; i > j \end{cases}$$

2. Si $A = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3y & 6y \\ -2z & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular el valor de: $E = 4x + 2y - z$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentra X que cumpla: $3x - 2A = 5B$

4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = 2A + 3B$$

Hallar la suma de los elementos de C

5. Expresar explícitamente la matriz "A":

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} \text{ donde}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = 3i + 2j; i > j \\ a_{ij} = i + j; i = j \\ a_{ij} = 2i - j; i < j \end{cases}$$

Calcular: (A^2)

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Determine $M = AB + 2A$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Rpta.: $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

ra
rabaja

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

Determine X si $(A + B)^t = B^2 - 2X$

Rpta: $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 7 & 9 & -9 \\ 13 & -17 & 33 \end{bmatrix}$