MATRICES

DETERMINANTE DE ORDEN MAYOR Y GAUSS JORDAN

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios con determinantes de orden mayor a 3 y aplica conceptos de operaciones elementales para determinar la inversa de una matriz por el método de Gauss Jordan.

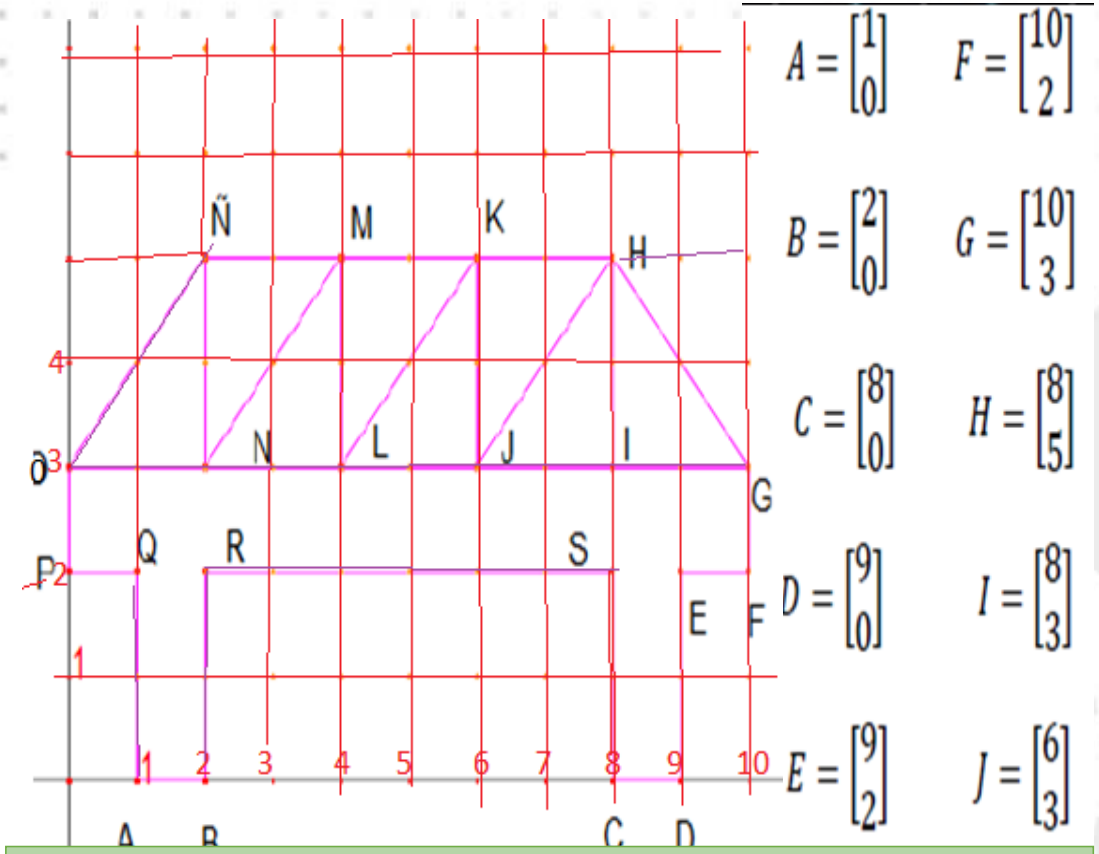
Universidad Tecnológica del Perú

Universidad Tecnológica del Perú

MATRICES

- DETERMINANTE DE ORDEN MAYOR
- INVERSA GAUSS-JORDAN

- UTILIDAD



$$A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$$

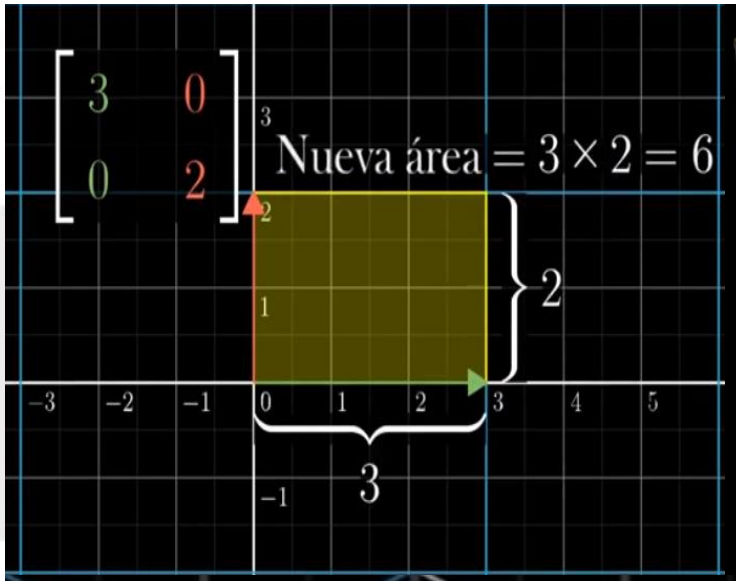
$$B=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$$

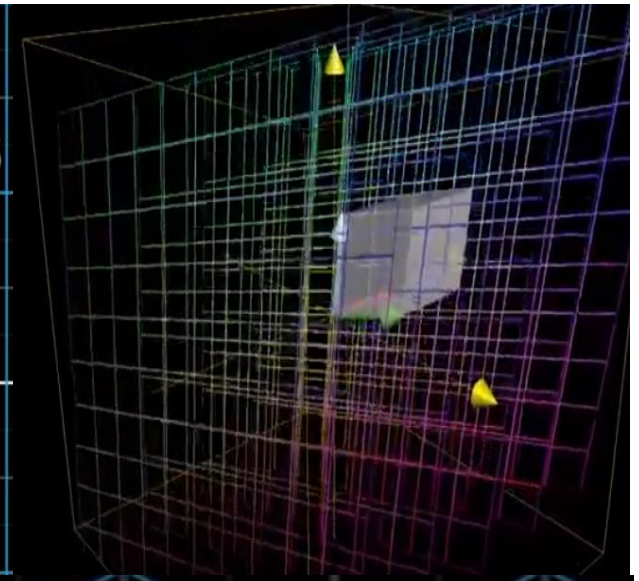
$$C=\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$$

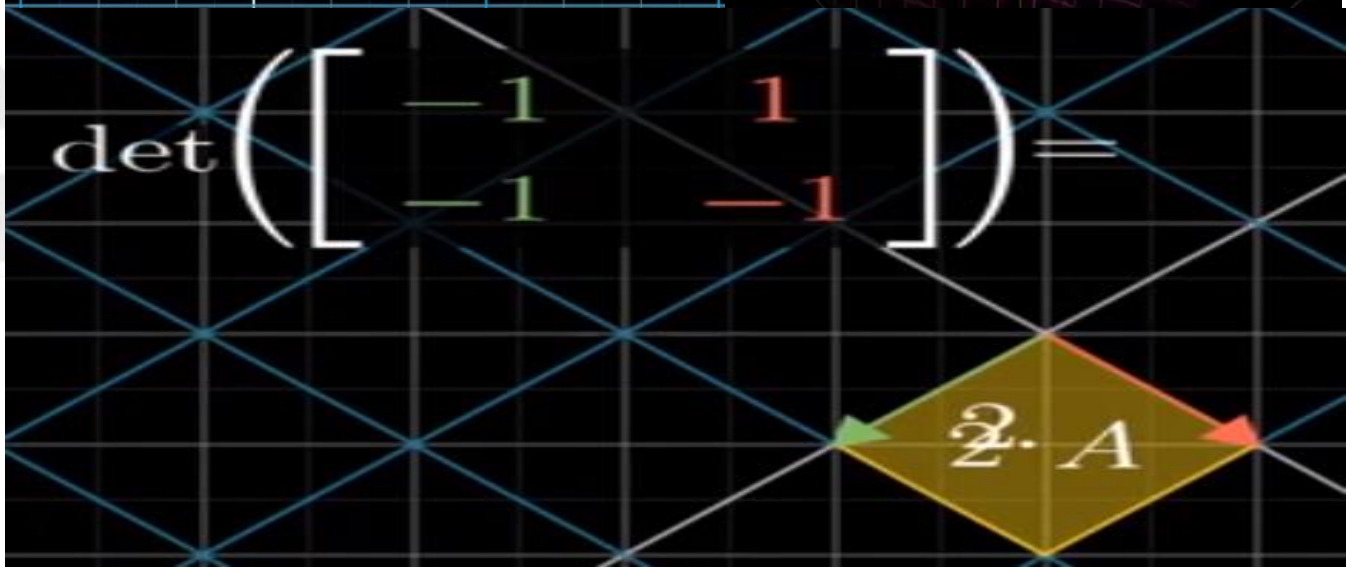
$$D=\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix} \quad J=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

Trasformación lineal de una matriz a determinante. El área lo observamos en el plano cartesiano.
Grafico matriz cuadrada de 2 x2 y 3x3







DETERMINANTE (orden MAYOR)

Universidad Tecnológica del Perú

DETERMINANTE DE ORDEN 4

CONSIDERAR:

1. Operaciones elementales entre las filas.
2. Propiedades de la determinante.

Consiste en conseguir que una de la columnas de la matriz esté formada por elementos nulos, menos el elemento base o pivote. Luego se calcula la determinante de una matriz de orden 3.

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILA

- Intercambiar o permutar dos filas (se suele hacer si alguna de las filas tiene al pivote 1).
- $f_i \leftrightarrow f_j$
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo (Usualmente el inverso, para obtener el pivote 1 de una fila).
- kf_i
- Sumarle o restarle a una línea otra multiplicada por un número no nulo (Se suele hacer para ubicar el 0 debajo de un pivote).
- $kf_i + f_j = \hat{f}_i$

PROPIEDADES DE LA DETERMINANTE

- Si una matriz tiene dos filas iguales o proporcionales, su determinante es nulo.
- Si permutamos o intercambiamos dos filas o columnas, su determinante cambia de signo.
- Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un número, el determinante queda multiplicado por el inverso de ese número.
- Sumarle o restarle a una línea otra multiplicada por un número no nulo, el determinante no cambia.
- Si k es una constante y A es una matriz de orden "n", entonces $|kA| = k^n|A|$
- Si una matriz es triangular, su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Dos métodos tienen gran aplicación para hallar determinantes:
Por Operaciones Elementales y por Cofactores

OPERACIONES ELEMENTALES:

$$\begin{matrix} \textit{Primera fila } f_1 \\ \textit{Segunda fila } f_2 \\ \textit{Tercera fila } f_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad f1 = f_1 + f_2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad f3 = f_3 - f_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sumar a una fila otra fila

Restar a una fila otra fila

f1 = 1 2 3
f2 = 2 4 1
3 6 4

Se puede hacer también por columnas

OPERACIONES ELEMENTALES:

$$\begin{matrix} \textit{Primera fila } f_1 \\ \textit{Segunda fila } f_2 \\ \textit{Tercera fila } f_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad 3f_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad -\frac{2}{3}f_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Multiplicar a una fila por un real diferente de cero

$$f_1 x f_2 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Intercambiar filas

Se puede hacer también por columnas

gente que trabaja

SEGUNDA PROPIEDAD DE OPERACIONES ELEMENTALES

Se trata de convertir la matriz a una del tipo triangular superior a base de las tres operaciones elementales anteriores pero debe tener en cuenta que:

Si suma o resta entre filas no se altera el determinante.

Si multiplica por un real a cualquier fila entonces al final debe dividir el determinante por el real.

Si intercambia filas entonces el determinante cambia de signo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Si a base de operaciones elementales la convierte en Triangular superior

$$\begin{bmatrix} a & m & n \\ 0 & b & g \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$Det = a.b.c$$

Carreras para gente que trabaja

DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR a 3

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{\textbf{1}} \quad 2.f_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{\textbf{2}} \quad -f_1 + f_2 = f_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\textbf{3}\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}_{\textbf{4}} \quad f_3 x f_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

A base de 4 operaciones elementales por filas la convirtió en triangular superior

$$Det = (2)(-1)(-5) = 10$$

Pero multiplico por 2 una fila $\Rightarrow Det = \frac{10}{2} = 5$

Pero intercambio filas $\Rightarrow Det = -5$ ***Rpta.***

Gauss se aplica a matrices de orden mayor a 3 para ver su utilidad

Determinante por el Método de Gauss

Ejemplo: Calcular el determinante por el método de cofactores:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F4 = F_1 + F_4 \\ \longrightarrow \\ F3 = -F_2 + F_3 \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$(2).\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad -(3).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+ (0).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} \quad - (0).\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[-2.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right] = 2\left[-2(18+4) - 1(36-14) + 2(-8-14)\right]$$

$$= 2\left[-44 - 22 - 44\right] = -220$$

$$= -3\left[3.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right] = -3\left[66 + 44 - 88\right] = -66$$

Det = -220-66= -286

EJEMPLO 5

Calcular la determinante de: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(8 - 75 + 4) - (-10 - 12 - 20)]$$
$$+3[(8 - 60 + 24) - (-8 - 12 - 120)]$$
$$-4[(4 + 150 - 8) - (20 - 10 + 24)]$$
$$= 2(-63 + 42) + 3(-28 + 140) - 4(146 - 34)$$
$$= 2(-21) + 3(112) - 4(112) = \mathbf{-154}$$

Desaprende lo que te lim

2 MATRIZ INVERSA GAUSS - JORDAN

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

El método consiste en *generar la matriz aumentada* $[A \vdots I]$ para luego por *operaciones elementales* de las filas, ubicar la matriz identidad I en el lado izquierdo de la matriz aumentada, la cual quedará como $[I \vdots A^{-1}]$.

PROPIEDADES

Si $|A| = 0$ *entonces* $\nexists\, A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = I$$
$$I^{-1} = I$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Determinación de la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan

Se usa operaciones elementales por filas, primero construimos la matriz $[A:I]$ usando operaciones elementales por filas debemos conseguir que la matriz identidad aparezca en el lado izquierdo ; La matriz que queda en la mitad derecha es precisamente la matriz inversa de A.

entonces

$$[A:I] \xrightarrow{OEF} [I:B] \qquad B = A^{-1}$$

Ejemplo:

Encontrar la inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Primero construimos la matriz $[A:I]$,usando OEF pasamos la matriz identidad a la izquierda $[I:B]$, entonces $B = A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} -2f_1 + f_2 \\ \\ -4f_1 + f_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_2 + f_3 \rangle \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} -f_2 \rangle \\ -f_3 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$-2f_3 + f_1$

$-f_3 + f_2$

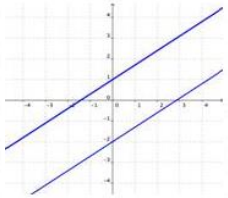
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Universidad Tecnológica del Perú

Incompatibles o inconsistente

No tiene solución

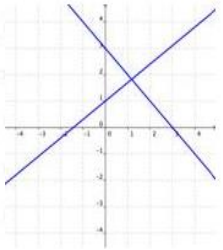


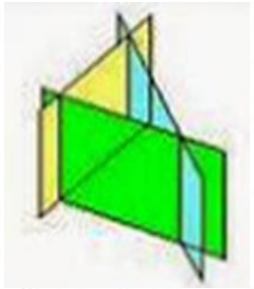
Compatibles o consistente

Tienen solución

Determinados

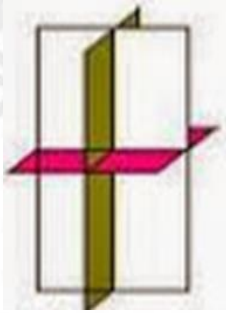
La solución es única

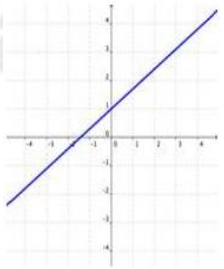




Indeterminados

Tienen infinitas soluciones





Carreras para gente que trabaja

Tipos de Sistema de Ecuaciones Lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales puede ser expresado como una ecuación matricial.

Sistema Lineal

$$\begin{cases} X - Y + 3Z = 4 \\ X + 2Y - 2Z = 10 \\ 3X - Y + 5Z = 14 \end{cases}$$

Siendo:

A: Matriz de coeficientes.
X: Matriz de variables
B: Matriz de constantes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}}_{B}$$

1 MÉTODO MATRIZ INVERSA

Este método se aplica sólo a sistemas de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

Dada la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

el método consiste en hallar X por:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

RECORDEMOS:

Si $|A| \neq 0$, entonces $\exists A^{-1}$ por lo tanto existe una solución única para $X = A^{-1} \cdot B$

Si $|A| = 0$, entonces $\nexists A^{-1}$ su solución no es única por lo que se usará otro tipo de solución.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-3z &= 4 \\ x+2y-2z &= 10 \\ 3x-y+5z &= 14 \end{cases}$

Hallemos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$|A| = 18$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 8 & -11 & -7 \\ -2 & 14 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -11 & 14 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 32-20+56 \\ -44+140-14 \\ -28+40+14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34/9 \\ 41/9 \\ 13/9 \end{bmatrix}$$

existe una solución única

REGLA DE CRAMER. Definición:

Un sistema es de Cramer si:

- El nº de ecuaciones es igual al nº de incógnitas
- $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Un sistema de Cramer es compatible determinado (S.C.D.) y su solución viene dada por las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Donde A_x, A_y, A_z,… son las matrices que resultan al sustituir la columna de la incógnita correspondiente (1ª, 2ª, 3ª,…) por la columna de los términos independientes

RESOLVER:

$$\begin{aligned} 2X - 3Y &= 2 \\ X + 2Y &= 0 \end{aligned}$$

EN FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

SOLUCIÒN:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SU DETERMINANTE PRINCIPAL= 7

Remplazamos la primera columna:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 \\ \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix}}{7} = \frac{4}{7}$$

Remplazamos la segunda columna:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}{7} = \frac{-2}{7}$$

Ejercicios explicativos con la Regla de Cramer

Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 1 \\ 5x & +3y & +4z & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$\textit{MATRIZ PRINCIPAL} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\textit{Hallar determinante de la matriz principal}$$

$$|A|=\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \quad {}_1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1(8-3)-1(12-5)-1(9-10)=5-7+1=-1$$

Carreras para gente que trabaja

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{rrrcc} x & +y & -z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 1 \\ 5x & +3y & +4z & = & 2 \end{array}$$

Término independiente

Término independiente

Solución:

Término independiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(8-3)-1(4-2)-1(3-4)}{-1} = \frac{5-2+1}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(4-2)-1(12-5)-1(6-5)}{-1} = \frac{2-7-1}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6$$

Término independiente

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(4-3)-1(6-5)+1(9-10)}{-1} = \frac{1-1-1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Universidad Tecnológica del Perú

Carreras para gente que trabaja

Ejercicios explicativos con la Regla de Cramer

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Para hallar la determinante de una matriz de orden mayor se elije la fila o columna con mas ceros.
2. Si la determinante de una matriz es cero, NO TIENE INVERSA.
2. Gauss – Jordan convierte la matriz original en matriz identidad con operaciones elementales

Gracias por tu participación

Cuando estudio algo que me gusta lo aprendo más rápido, si sonrío cuando aprendo aprenderé mucho más rápido.

Esta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Practica mucho para que realices tus actividades satisfactoriamente.
2. Recuerda que tienes el FORO para realizas tus consultas.

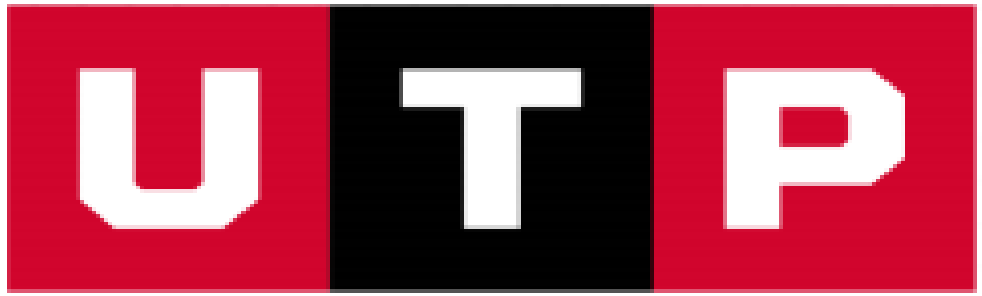
Desaprende lo que te limita

EJERCICIO RETO

Calcule la inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mediante Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{35} & \frac{-13}{35} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{35} & \frac{-9}{35} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

UTP Universidad Tecnológica del Pe



Universidad
Tecnológica
del Perú