Introducción a la Matemática para la Ingeniería

Unidad:

Matrices y Determinantes

Docente: Jaime Fernández Caycho

Logro

Al finalizar la unidad, el estudiante utiliza el concepto de Matrices y Determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicado a problemas de ingeniería.

Importancia

Las matrices y determinantes son dos conceptos del álgebra relevantes porque facilitan el ordenamiento o arreglo de los datos , así como su manejo y tratamiento. Diversas áreas como la medicina, las ciencias sociales lo utilizan como es el caso de la economía donde se usa las matrices insumo -producto o la informática en lenguajes de programación como un tipo de datos.

Contenido general

- Matrices
- Determinantes
- Inversa de una matriz

Matrices y Determinantes

- Matrices
- Determinantes
- Inversa de una matriz

Matrices

- Elementos de una matriz
- Tipos de Matrices
- Matrices cuadradas
- Matrices especiales
- Operaciones con matrices . Suma y resta de matrices. Igualdad
- Producto de un escalar y una matriz
- Producto de matrices

Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.
De manera formal $A = [a_{ij}] \,/\, A \in \mathbb{R}^{mxn}$ donde m y n indican la cantidad de filas y columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Se representa por una letra mayúscula

Ejemplo

$$\begin{array}{cl} A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{4x5} & \begin{array}{l} \text{Primera Fila} \\ \text{Segunda Fila} \\ \text{Tercera Fila} \\ \text{Cuarta Fila} \end{array} \end{array}$$

Primera Columna

Segunda Columna

Quinta Columna

Comparamos:

$$a_{23} = -1$$

$$a_{34} = 8$$

Tipo de Matrices

<u>Matriz Fila:</u> matriz con una sola fila.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{1x4}}$$

<u>Matriz Rectangular:</u> Matriz, donde el número de filas y de columnas son diferentes.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{3x4}}$$

<u>Matriz Columna:</u> Matriz con una sola columna.

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{4x1}}$$

<u>Matriz Cuadrada:</u> Matriz donde el número de filas y de columnas son iguales.

Diagonal Principal

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{3x3}}$$

Matrices cuadradas

Matriz Diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Escalar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular Superior

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz Transpuesta: Dada la matriz A, la matriz A^t es aquella que se origina al intercambiar las filas por columnas (o viceversa), de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{3x3}} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{3x3}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}_{\mathbf{2x3}} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}_{\mathbf{3x2}}$$

Matrices especiales

Matriz Simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si se cumple lo siguiente: $A = A^t$.

Se cumple que : $a_{ij} = a_{ji}$

Los elementos de la diagonal son los mismos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo $a_{12} = a_{21}$

Matriz Antisimétrica: Una matriz cuadrada A es antisimétrica si se cumple lo siguiente: $A = -A^t$

Se cumple que : $a_{ij} = -a_{ji}$

Los elementos de la diagonal deben ser cero

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ -9 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo $a_{13} = -a_{31}$

Operaciones con matrices

Igualdad de Matrices

Sean las matrices A y B del mismo orden. Si A = B

$$a_{ij} = b_{ij}\ ;\ \forall i; j$$

Ejemplo : Dadas las matrices A y B .
Calcula los valores de x ,y , m,n si A = B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & n \\ m & 6 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & y \end{bmatrix}_{3x3}$$

Se deduce

x=1 , y= - 1 m=9 n=3

Suma y resta de matrices

Sean dos matrices A y B del mismo orden

Se define $C = A \pm B$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\ ;\ \forall i; j$$

Ejemplo : Dadas las matrices A y B .
Calcula los elementos de A +B

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}_{3x3} , B = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} ,$$

Operaciones con matrices

Producto de un escalar y una matriz

$$Sea\ A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \wedge \quad k \in \mathbb{R}$$

Se define: $$kA = k \cdot [a_{ij}]_{m\times n}$$

$$k.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{2m} \\ & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mm} \end{bmatrix}$$

Ejemplo : Sea la matriz A $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

y un escalar k=3

$$kA = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Sean las matrices A y B , se verifica la existencia del producto si *Número de columnas de "A" = número de filas de "B"*

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}$

Entonces el producto A.B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ & & \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2m} \\ & & \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Es decir

$$c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + \cdots + a_{1p}.b_{p1}$$

Multiplicación de matrices

Por ejemplo . Calcular el producto de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x3} B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3x2}$$

El producto se calcula

$$c_{11} = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 2 = 17$$

$$c_{12} = -2 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 2$$

$$c_{21} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 10$$

$$c_{22} = -2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 1$$

Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 10 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Observación : El producto no es conmutativo

Determinantes

- Determinantes de 2 x 2
- Determinantes de 3 x 3 .
- Propiedades de los determinantes
- Determinantes de orden mayor a tres
- Sistema de ecuaciones lineales. Regla de Cramer

Determinantes de orden 2x2

Se calcula en matrices cuadradas y se denota $\boldsymbol{Det(A) = |A|}$

$$Si\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo:

Calcula el determinante de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

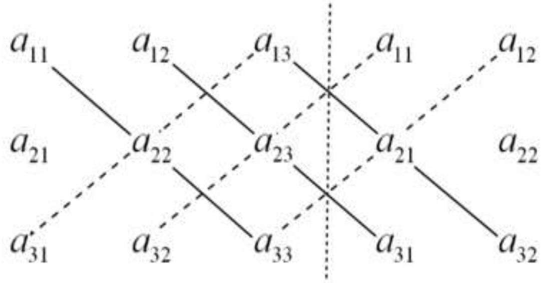
$$|A| = 6 \times 3 - 5 \times -4$$

$$|A| = 38$$

Determinante de orden 3x3: Método de Sarrus

Se debe aumentar las dos primeras columnas o las dos primeras filas . Luego se calcula el producto de las diagonales

En el primer caso el valor del determinante se calcula



$$|A| = \sum productos_{abajo} - \sum productos_{arriba}$$

En el segundo caso el valor del determinante se calcula

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$|A| = \sum productos_{abajo} - \sum productos_{arriba}$$

Determinante de orden 3x3: Método de Sarrus

Ejemplo Calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolución

Suma = 35

1x2x1 +4x3x2 +3x3x1

$$|A| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \color{red}{2} & \color{red}{1} \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} \\ \color{red}{1} & \color{red}{4} \end{matrix}$$

2x2x3 + 1x3x1 +1x3x4

Suma = 27

$$|A| = 27 - 38 = -7$$

Propiedades de los determinantes

1. Si los elementos de una fila (o columna) de A es 0, entonces $|A| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

2. Si una matriz tiene dos líneas proporcionales o iguales entonces su determinante vale cero. entonces $|A| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

3. Si una matriz es triangular, su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \times 2 \times 7$$

4. El determinante de A y su transpuesta son iguales. $|A| = |A^T|$

5. El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B es igual al producto de los determinantes de A y de B $|AB| = |A|.|B|$

6. Si se **intercambian dos líneas** de un determinante entonces **cambia su signo.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

Determinante de orden superior a 3 : Operaciones Elementales

Se convierte a una matriz triangular y se tiene en cuenta:
Si suma o resta entre filas no se altera el determinante.
Si multiplica por un real a cualquier fila entonces al final debe dividir el determinante por el real.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & m & n \\ 0 & b & g \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow DetA = a.b.c$$

OPERACIONES ELEMENTALES:

$$\begin{array}{l} \textbf{\textit{Primera fila }} f_1 \\ \textbf{\textit{Segunda fila }} f_2 \\ \textbf{\textit{Tercera fila }} f_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{f3 = f_3 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{f2 = f_2 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

resta a una fila otra fila

Restar a una fila el doble de otra fila

$$\Rightarrow \boldsymbol{f3 = f_3 + f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow Det = 1 \times 1 \times -7 = -7$$

Sumar a una fila otra fila

Las transformaciones elementales también pueden ser por columna

Determinante de orden superior a 3 : Método de Cofactores

Menor Complementario (M)

Una submatriz al eliminar fila y columna de un elemento

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Cofactor (C)

Es el resultado de multiplicar el menor complementario de un elemento por $(-1)^{i+j}$ $\Rightarrow$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Al calcular el cofactor del elemento C_{21} se obtiene:

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

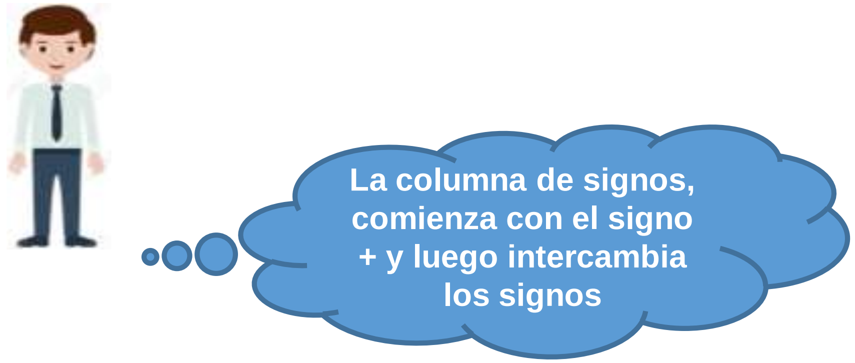
Determinante por Cofactores

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

Determinante de orden superior a 3 : Método de Cofactores

Determinante por Cofactores

Se calcula el producto del elemento fila (o columna) por su cofactor y luego se suman los resultados



Determinante de orden superior a 3 : Método de Cofactores

Ejemplo: Calcula el determinante de A

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{red}{+} & \color{red}{-} & \color{red}{+} & \color{red}{-} \end{array} \\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Resolución

$$A = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \ - \ 0 \Rightarrow$$

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Luego

0 por propiedad

$$|A| = -1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1$$

En la práctica podemos combinar los métodos: operaciones elementales, cofactores, Regla de Sarrus

Sistema de Ecuaciones con la Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se resuelve mediante la Regla de Cramer si cumple:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero (**det (A) # 0**)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n3}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Se observa que

- Se debe reemplazar cada columna que implica a los coeficientes de una variable por la columna de resultados (términos independientes)

Sistema de Ecuaciones con la Regla de Cramer

En una playa de estacionamiento oferta espacio para camiones , autos y motocicletas. En la semana que paso el dueño ha observado que el total de vehículos atendidos es 600. Asimismo se sabe que el monto recaudado ha sido de 38 mil soles. Se sabe además que el costo por ocupar el espacio por día es de S/. 80 , S/.50 y S/. 40 para camiones, autos y motos respectivamente. Por otra parte el monto recaudado por los camiones excede en 4000 al doble de lo recaudado por los autos. Formula el sistema de ecuaciones y utiliza la regla de Cramer para dar solución al sistema

Resolución

Sean x= # camiones

y= # autos

z= # motos

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 80x + 50y + 40z = 38000 \\ 80x - 100y = 4000 \end{cases}$$

Calcula determinante del sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 80 & 50 & 40 \\ 80 & -100 & 0 \end{vmatrix} = -4800$$

Calcula determinante respecto a x

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 38000 & 50 & 40 \\ 4000 & -100 & 0 \end{vmatrix} = -1440000$$

Calcula determinante respecto a y

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 80 & 38000 & 40 \\ 80 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -960000$$

Calcula determinante respecto a z

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 80 & 50 & 38000 \\ 80 & -100 & 0 \end{vmatrix} = -480000$$

La solución será

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1440000}{-4800} = 300$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-960000}{-4800} = 200$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-480000}{-4800} = 100$$

Inversa de una matriz

- Matriz de cofactores
- Adjunta de un matriz.
- Matriz Inversa
- Transformaciones elementales
- Inversa de una matriz . Método de Gauss – Jordan
- Solución de sistema de ecuaciones. Método de Gauss

Menor complementario y matriz de cofactores

Matriz de cofactores

Es la matriz formada por los cofactores
Para una matriz de 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$CofA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{122} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Dada la matriz A . Determina la matriz de cofactores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Se formula los cofactores de cada elemento

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Menor complementario y matriz de cofactores

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz de cofactores será

$$CofA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -10 & 4 & 2 \\ 14 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Adjunta de una matriz

La adjunta de una matriz se define como la transpuesta de la matriz de cofactores

$$Adj(A) = [Cof\,A]^T$$

Ejemplo : Dada la matriz A . Determina la matriz adjunta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolución

Se calcula matriz de cofactores

$$Cof\,A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -10 & 4 & 2 \\ 14 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se determina la transpuesta

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 14 \\ 2 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa

Sea $A = [a_{i,j}]_{nxn}$, si existe $B = [b_{i,j}]_{nxn}$

tal que $A.B = B.A = I$, entonces B es la inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$, la definición se convierte en: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Matriz inversa : Método Adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

Del ejemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & -10 & 14 \\ 2 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego la inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -1 & -2 & 5/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa : Método de Gauss

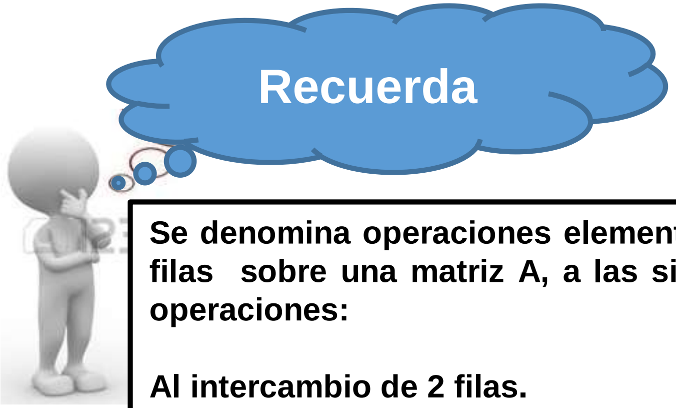
Se forma un matriz aumentada con la matriz identidad

A | I

Se realiza operaciones elementales para transformar la matiz en un modelo

I | B

Se deduce que **B** es la matriz inversa



Se denomina operaciones elementales por filas sobre una matriz A, a las siguientes operaciones:

Al intercambio de 2 filas.
A la multiplicación de una fila por un escalar no nulo.
A una fila le sumamos otra fila multiplicada por un escalar real.

Ejemplo : Dada la matriz A . Determina la matriz inversa usando el método de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolución

Se forma una matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se realiza las transformaciones elementales para trianguarizar la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_1 - 3f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_1 - 3f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones con Método de Gauss

Consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente escalonado, aplicando operaciones elementales.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = -8 \\ 2x + \quad 2z - t = 13 \\ -x + y + z - t = 8 \\ 3x + 3y - z + 2t = -1 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Se aplica transformaciones

$$\xrightarrow{f_2 - 2f_1} \xrightarrow{f_3 + f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_4 - 3f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & 23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_4 + f_3} \xrightarrow{4f_3 + 3f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 0 & 12 & -13 & 87 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{6f_4 - f_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 0 & 12 & -13 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 51 \end{array}\right]$$

Por tanto

$$\boldsymbol{-17t = 51 \Rightarrow t = -3}$$

$$\boldsymbol{12z - 13t = 87 \Rightarrow z = 4}$$

$$\boldsymbol{-4y + 4z - 7t = 29 \Rightarrow y = 2}$$

$$\boldsymbol{x + 2y - z + 3t = -8 \Rightarrow x = 1}$$

Conclusiones

- Las matrices representan un ordenamiento de la información y que por medio de operaciones permiten realizar cálculos para la toma de decisiones.
- El valor de un determinante permite verificar si un sistema de ecuaciones tiene solución y geométricamente aporta al cálculo de áreas
- La regla de Cramer y el método de Gauss aportan a la resolución de sistema de ecuaciones con una cantidad de variables mayor a 2

Gracias

Docente: Jaime Fernandez Caycho