NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

FORMA POLAR Y TRIGONOMETRICA

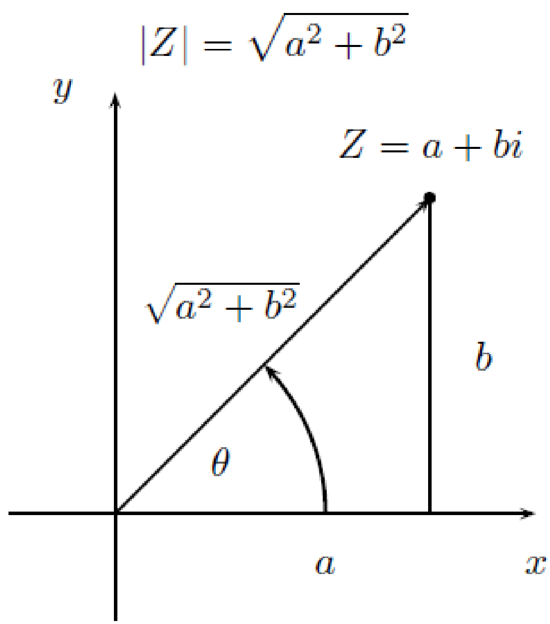
UTP Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante resuelve problemas donde utiliza conceptos de números complejos en su forma polar o trigonométrica con autonomía y seguridad, además identifica y
aplica propiedades y criterios lógicos de solución.

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

- El módulo de un número complejo (|Z|) es la distancia entre el origen y el punto que representa al número complejo.

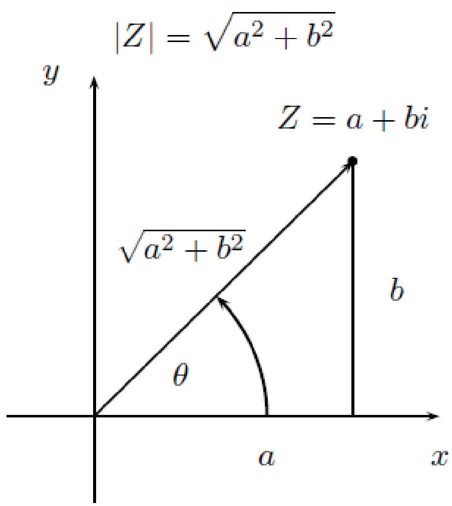


Z= a + bi

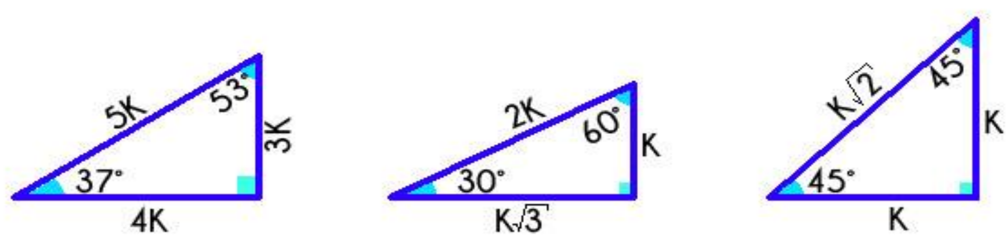
r = |Z| $=\sqrt{a^2 + b^2}$

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

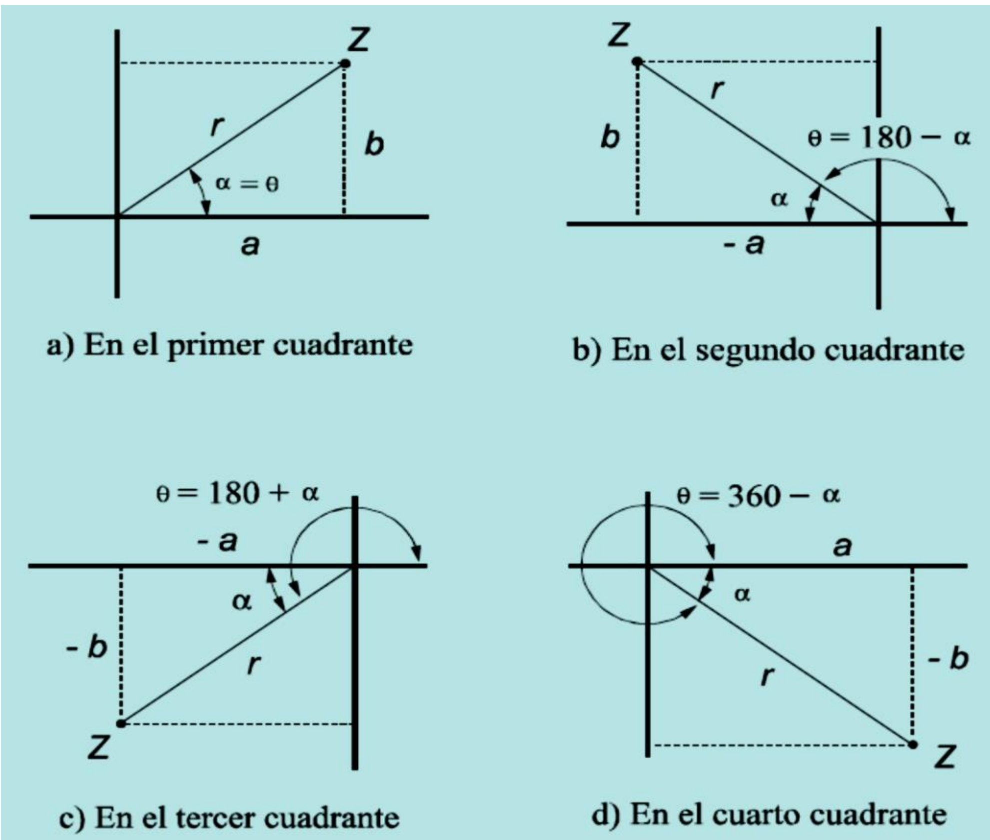
- El argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por arg (z). Para obtener el argumento, aplicamos trigonometría elemental en el mismo triángulo:



$$tang\,(\alpha) = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \Longrightarrow \alpha = tang^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$$



- Se tienen conocidos los valores de *a* y de *b*, a partir de los cuales deben encontrarse *r* y θ .



Sea θ el ángulo formado por eje *x* positivo y por *r*, medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo conforme a la trigonometría de los cuadrantes) y sea α el ángulo agudo formado por *r* y el eje *x* más próximo.

Conocido el ángulo α en cualquier cuadrante, se puede deducir el valor del ángulo θ de la siguiente manera:

θ = α si Z está en el primer cuadrante

θ = 180 - α si Z está en el segundo cuadrante

θ = 180 + α si Z está en el tercer cuadrante

θ = 360 - α si Z está en el cuarto cuadrante

FORMA POLAR

El número complejo Z en forma polar se define como:

$$Z = r_{\theta}$$

Donde:

r es el módulo de Z (|Z|)

α es el argumento de Z (Arg (Z))

También se puede expresar de la siguiente forma:

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

✓ **Paso de forma binómica a polar:**

Tenemos z = a + bi y para pasarlo a forma polar hallamos el módulo r y el ángulo

Expresar el complejo Z = -2 + 5,8 i de forma binómica a forma polar:

Hallamos:

$r = \sqrt{(-2)^2 + (5,8)^2} \quad r = 6,1$

$\alpha = \text{tang}^{-1}\left(\frac{5,8}{2}\right) \cong 71°$

El ángulo está en el segundo cuadrante

$\theta = 180 - 71 = 109°$

$Z = 6,1_{109°}$

✓ **Multiplicación en forma polar**

Para multiplicar en forma polar, multiplicamos los números y sumamos sus grados.

✓ **EJEMPLO:**

$$5_{45^\circ} \cdot 4_{90^\circ} = (5 \cdot 4)_{45^\circ + 90^\circ} = 20_{135^\circ}$$

División en forma polar

Dividimos los números y restamos sus grados

EJEMPLO:

$$\frac{5_{45^\circ}}{(2_{15^\circ})^2} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$$

Potencia en forma polar

Para elevar un complejo en forma polar a un exponente, se eleva su módulo al exponente y se multiplica su argumento por dicho exponente:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

Calcular las operaciones en forma polar:

Sea $z_1 = 6_{225°}$, $z_2 = 3_{150°}$, $z_3 = 2_{300°}$, $z_4 = 5_{\frac{\pi}{4}}$ y $z_5 = 4_{\frac{\pi}{2}}$

Calcular:

a) $z_1 . z_2$

b) z_1 / z_3

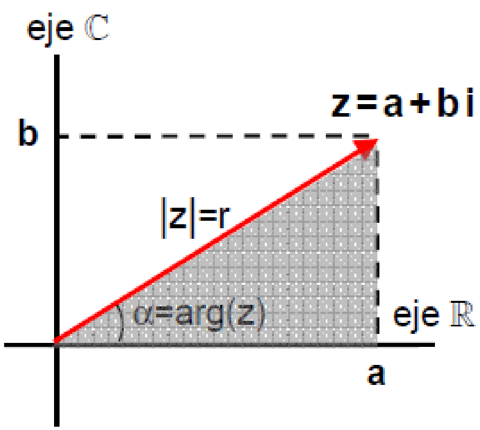
c) $z_4 . z_5$

d) $z_2^{\ 4}$

FORMA TRIGONOMÉTRICA

Paso de forma binómica a trigonométrica.

$$z = a + bi \quad ; \quad z = (a, bi)$$



$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha) = \dfrac{a}{r} \Longrightarrow a = r\cdot\cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{b}{r} \Longrightarrow b = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\end{array}\right\} \Longrightarrow a + bi = r\cdot\cos(\alpha) + r\cdot\operatorname{sen}(\alpha)i$$

$$a + bi = r(\cos(\alpha) + i\cdot\operatorname{sen}(\alpha))$$

Ejm. $Z = -6+\sqrt{10}i$ expréselo en forma trigonométrica

Ejm. $Z = -6+\sqrt{10}i$ **expréselo en forma trigonométrica**

EJERCICIOS

- **Pasar a forma polar**
- $z_1 = 4\,(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
- $Z_{4\,=}\, 2\,(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$
- **Pasar a forma binómica.**
- $z_2 = 6_{45°}$
- $z_3 = 3_{53°}$

FORMA POTENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Cuando el número está expresado en forma polar, sus potencias son muy sencillas de calcular, pues:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

$$(3_{30^\circ})^4 = (3^4)_{4\cdot 30^\circ} = 81_{120^\circ}$$

$$(7_{45^\circ})^2 = (7^2)_{2\cdot 45^\circ} = 49_{90^\circ}$$

EJERCICIO DE APLICACION

Halle $(Z_1)^{10}$**:** $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

Convirtiendo el complejo a su forma polar:

r = $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \rightarrow$ r = 2 ; $\theta = tang^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \rightarrow \theta = 60°$

$z^{10} = (2_{60°})^{10}$

$z^{10} = 2^{10}{}_{10x60}$

$z^{10} = 2^{10}{}_{600}$ reducir el ángulo

$\boldsymbol{Halle}\ \dfrac{(Z_1)^{30}+(Z_2)^{25}}{(Z_3)^{10}}$ **:¿en qué cuadrante se encuentra?**

$$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i\ ; \quad Z_2 = 1 - \sqrt{3}i \qquad Z_3 = -1 - i\ ;$$

Raíz de un número complejo

Operaciones complejos forma polar

Para realizar estas operaciones el complejo debe estar en forma polar. Debemos conocer su módulo y su argumento (ángulo). Si el número complejo está en forma binómica o trigonométrica lo primero que debemos hacer es pasarlo a forma polar para poder aplicar esta fórmulas y realizar las operaciones.

Ejercicio de aplicación

Resuelva la siguiente raíz: $\sqrt[6]{1+i}$

Primero convertimos $(1+i)$ a forma polar.

Módulo de $(1+i)$ $\longrightarrow$ $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Argumento de $(1+i)$ $\longrightarrow$ $\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=45°$

Usando el procedimiento que vimos anteriormente sabemos que

Módulo de $\sqrt[6]{1+i}$ $\longrightarrow$ $r'=\sqrt[6]{\sqrt{2}}=\sqrt[12]{2}$

Argumento de $\sqrt[6]{1+i}$ $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \qquad \alpha' = \frac{45^\circ + 360^\circ k}{6} = \begin{cases} k = 0 & \rightarrow & \alpha_1' = 7^\circ\ 30' \\ k = 1 & \rightarrow & \alpha_2' = 67^\circ\ 30' \\ k = 2 & \rightarrow & \alpha_3' = 127^\circ\ 30' \\ k = 3 & \rightarrow & \alpha_4' = 187^\circ\ 30' \\ k = 4 & \rightarrow & \alpha_5' = 247^\circ\ 30' \\ k = 5 & \rightarrow & \alpha_6' = 307^\circ\ 30' \end{cases}$$

Entonces las seis raíces están dadas por:

$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[6]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \begin{cases} z_1' = (\sqrt[12]{2})_{7^\circ\,30'} \\ z_2' = (\sqrt[12]{2})_{67^\circ\,30'} \\ z_3' = (\sqrt[12]{2})_{127^\circ\,30'} \\ z_4' = (\sqrt[12]{2})_{187^\circ\,30'} \\ z_5' = (\sqrt[12]{2})_{247^\circ\,30'} \\ z_6' = (\sqrt[12]{2})_{307^\circ\,30'} \end{cases}$$

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Es importante considerar en que cuadrante se encuentra Z para hallar correctamente el argumento (ángulo).
2. Expresar Z en su forma polar, requiere del módulo y argumento.

Excelente tu participación

Sólo llegarás rápido juntos llegaremos lejos.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Pase los siguientes números complejos a forma polar y trigonométrica.

$$z_1 = 3 + \sqrt{5}i \;;\; z_2 = -4 - 6i \;;\; z_3 = -3 + 2i$$

SOLUCIÓN:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{9+5} = \sqrt{14}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 36.7°$$

$$r_\theta = \sqrt{14}_{36.7°}$$

$$r_\theta = \sqrt{14}(\cos(36.7°) + i\,sen(36.7°))$$

$$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-6}{-4}\right) = 56.3°$$

$$180° + 56° = 236.3°$$

$$r_\theta = \sqrt{52}_{236.3°}$$

$$r_\theta = \sqrt{52}(\cos(236.3°) + i\,sen(236.3°))$$

$$|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = -33.7°$$

$$180° - 33.7° = 146.3$$

$$r_\theta = \sqrt{13}_{146.3°}$$

$$r_\theta = \sqrt{13}(\cos(146.3°) + i\,sen(146.3°))$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Calcular y expresar en forma polar y trigonométrica

$$M = \frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i^{15}}{2(2+i)-(3-2i)+3-i^{3}}$$

SOLUCIÓN:

$$M = \frac{(6-4i)+(2+i)-5-(-i)}{(4+2i)-(3-2i)+3-(-i)}$$

$$= \frac{3-2i}{4+5i}\cdot\frac{(4-5i)}{(4-5i)}$$

$$= \frac{2-23i}{41}$$

$$= \frac{2}{41}-\frac{23}{41}i$$

$$|M| = \sqrt{\left(\frac{2}{41}\right)^2+\left(-\frac{23}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{533}}{41}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{23}{2}\right) = -85^\circ$$

$$360^\circ - 85^\circ = 275^\circ$$

$$r_\theta = \frac{\sqrt{533}}{41}{}_{275^\circ}$$

$$r_\theta = \frac{\sqrt{533}}{41}\left(\cos(275^\circ)+i\,sen(275^\circ)\right)$$

EJERCICIO RETO

Determine el valor de z en su forma polar y trigonométrica.

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{8}\left(\sqrt{3}-i\right)^{6}}{(-1+i)^{4}}$$

Rpta: $z = (2^{12})_{120}$

¡Ahora todos a practicar!