NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

MÓDULO Y OPERACIONES

Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y realiza operaciones con números complejos.

¿Qué es un número complejo?

Un número complejo es una expresión de la forma $a + bi$, *donde* a *y* b *son números reales,* i *la unidad imaginaria, dicha expresión tiene la propiedad de que* $i^2 = -1$.

En general, todo número complejo puede ser representado como:

$$z = a + bi$$

a *es la parte real* $(Re\{z\})$
b *es la parte imaginaria* $(Im\{z\})$

$z = a + bi$	$z = (a; b)$
forma binómica	*forma cartesiana*

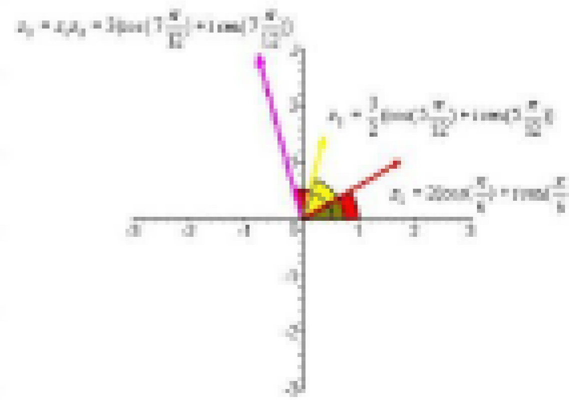
UTP Universidad Tecnológica del Perú

¿Para que sirven los números complejos?

En la ingeniería los números complejos se utilizan para describir circuitos eléctricos y ondas electromagnéticas

https://www.tipoada.com/wp-content/uploads/ondas-electromagn%C3%A9ticas.jpg

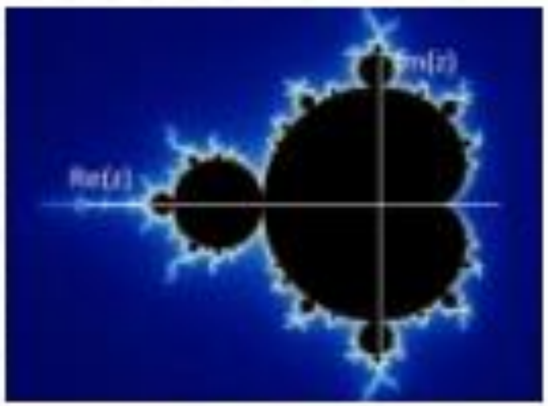
Se usan en la navegación, para ubicar una posición, dividiendo el plano complejo en semirectas separadas de 15° a 30° atravesando el origen. Uniendo estos punto con el Curvigrafo.



https://www.tipoada.com/wp-content/uploads/ondas-electromagn%C3%A9ticas.jpg

¿Para que sirven los números complejos?

El conjunto de complejos también aparece en muchos objetos fractales



Conjunto de Mandelbrot

https://nuagram.es/conoces-los-numeros-complejos/

En la física térmica, es posible obtener cantidades de energía imaginarias.

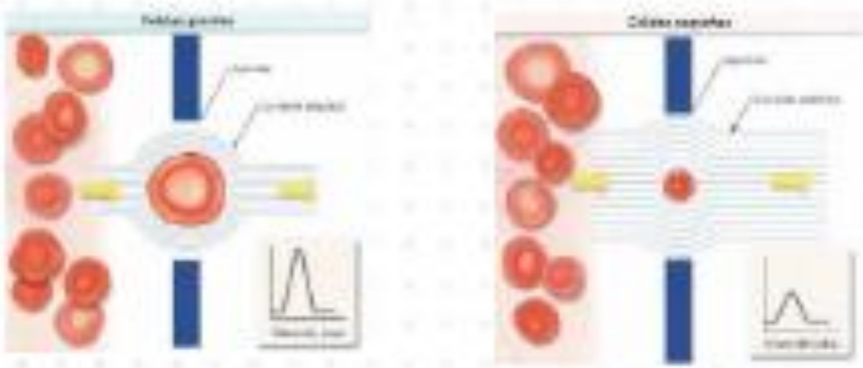
https://nuagram.es/conoces-los-numeros-complejos/

¿Para que sirven los números complejos?

Otra aplicación impresionante es la fusión de la ingeniería con la medicina visto en el cálculo de la impedancia eléctrica

Basado en la resistencia que ofrecen las células al paso de la corriente eléctrica, cuando atraviesan un orifico de apertura que separa dos medios con diferente potencias (uno positivo y otro negativo)

- *La impedancia de los leucocitos.*
- *Concentración de la hemoglobina.*
- *Conteo de Eritrocitos y plaquetas*



https://es.slideshare.net/SandraCruzGuerrero/automatizacion-en-hematologia?from_action=save

https://anestesiar.org/2012/pulmovista-500-drager/

NÚMERO IMAGINARIO

La solución de ecuaciones Polinómicas no pueden resolverse considerando solo el campo de los números reales.

$$x^2 + 1 = 0$$

No tiene solución real

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1} = \mathrm{i}$$

Se le llama "la unidad o número imaginario "

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2\mathrm{i}$$

Ahora podemos pensar en la solución de Ecuaciones que no se podían en los reales.

2 POTENCIAS DE i

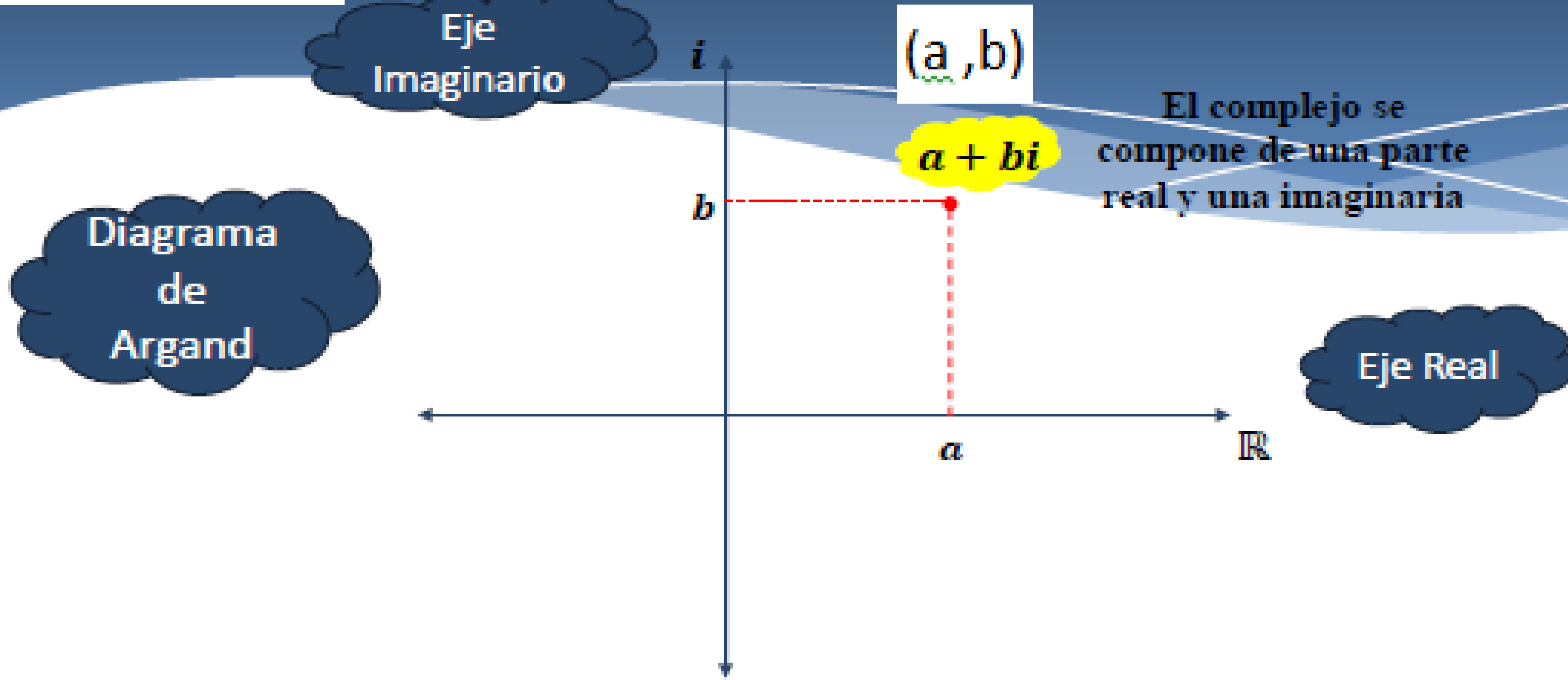
$$\sqrt{-1} = i$$
$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Ejemplo:

$$i^{23} = i^{5+3}$$

$$\rightarrow i^3 = -i$$

NÚMERO COMPLEJO



$a + bi$ es conocida como la forma Binomial del complejo

No podemos comparar entre dos complejos porque no hay orden entre ellos.

3 CONJUGADO

$$z = a + bi$$

Sólo se cambia el signo de la parte imaginaria.

$$\bar{z} = a - bi$$

PROPIEDADES:

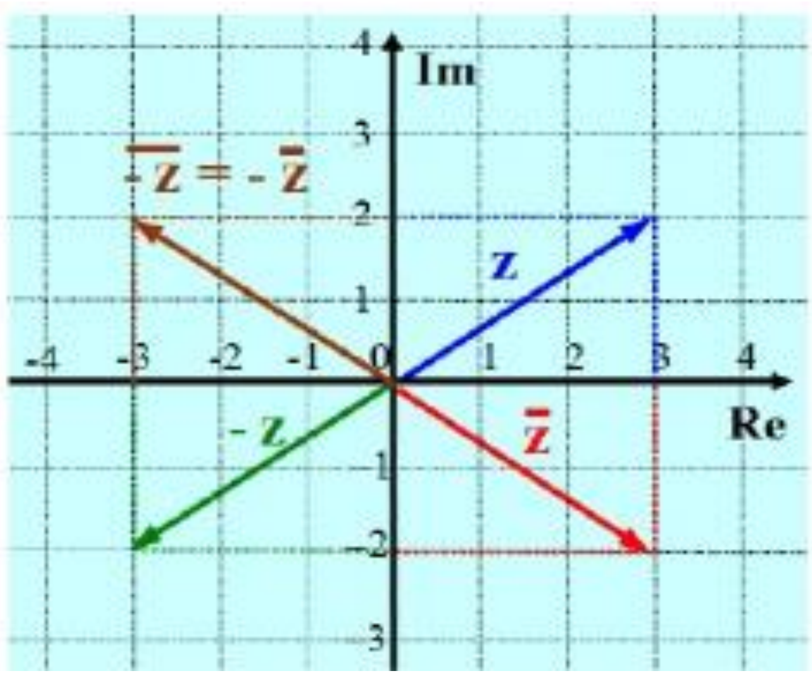
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

Complejo opuesto, conjugada

$\overline{-z} = -a + bi$



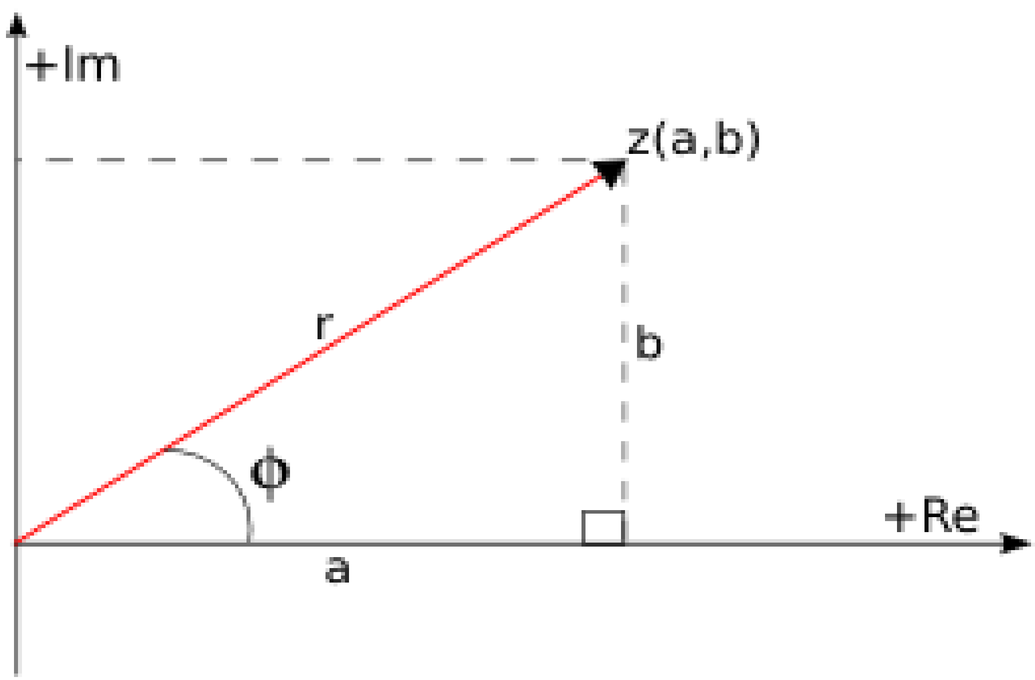
$z = a + bi$

$-z = -a - bi$

$\overline{z} = a - bi$

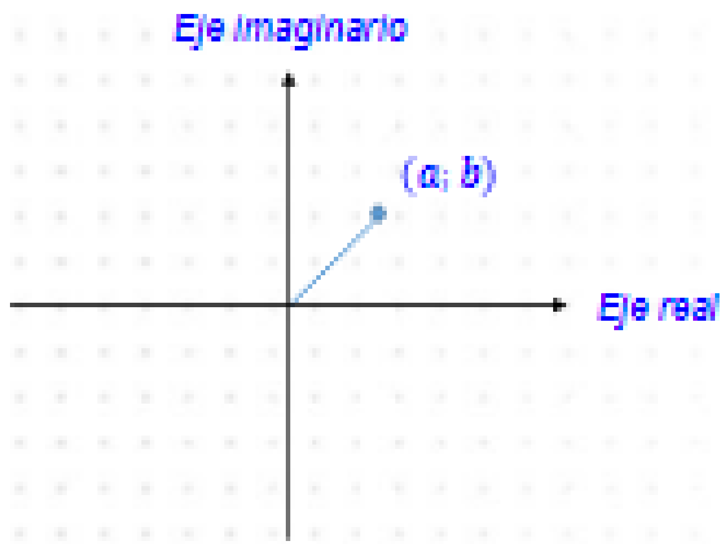
- **<u>REPRESENTACIÓN GRÁFICA.</u>**

  El punto que representa a un número complejo se llama **“afijo”**. Si unimos el origen con el afijo, tenemos el vector representante de un número complejo.



MÓDULO

Dado $z = a + bi$ *y como vector* $(a; b)$*, el módulo será:*



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El módulo es la distancia del centro de coordenadas al punto complejo o afijo.

OPERACIONES

Igualdad en $\mathbb{C}$

$$z_1 = z_2$$
$$a + bi = c + di$$
$$a = c \ \wedge \ b = d$$

Ejemplo:

$z_1 = (3x; 5)$; $z_2 = 6 + (y + 2)i$

Si $z_1 = z_2$. *Hallar* $x + y$

$\Rightarrow$ $(3x; 5) = 6 + (y + 2)i$

$3x = 6 \qquad 5 = y + 2$

$x = 2 \qquad 3 = y$

$\Rightarrow$ $x + y = 5$

OPERACIONES

Suma en ℂ:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$
$$= (a + c) + (b + d)i$$

Resta en ℂ:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:

$z_1 = (3; 4)$; $z_2 = 6 + i$

Hallar $z_1 \pm z_2$

$$z_1 + z_2 = (3 + 6) + (4 + 1)i$$
$$= 9 + 5i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 6) + (4 - 1)i$$
$$= -3 + 3i$$

Ejemplo

$$3\,(-2 - 4i) + (5/2 + 3i) = (-6 - 12i) + (5/2 + 3i)$$

$$= -12/2 - 12i + 5/2 + 3i$$

$$= -7/2 - 9i$$

OPERACIONES

Producto de una escalar por un ℂ:

$$k \cdot z = k(a + bi) = ka + kbi$$
$$k \cdot z = (ka; kb)$$

Producto de 2 números ℂ:

Dados dos números complejos

$$z_1 = a + bi \ ; \ z_2 = c + di$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

$$z = 4(3; 4) = 4(3 + 4i)$$

$$A = (12; \ 16) = 12 + 16i$$

$$z_1 = (3; 4) \ ; \ z_1 = (2; -5)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(2 - 5i)$$

$= 6 - 15i + 8i - 20i^2$; recuerde: $i^2 = -1$

$= 6 - 15i + 8i + 20$

$= 26 - 7\,i$

Ejm.

$$(\mathbf{4}+\mathbf{5}\boldsymbol{i}).(\mathbf{3}+\mathbf{2}\boldsymbol{i}) = 12 \ +8i \ +15i \ +10i^2 = 2+23i \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{2}+\mathbf{23}\boldsymbol{i})$$

Ejm. $Dados$: $Z_1 = (2+3i)$; $Z_2 = (-2+2i)$; $Z_3 = (-3-4i)$

$Hallar$: $(\boldsymbol{Z_3}-\mathbf{3}\boldsymbol{Z_2})(\boldsymbol{Z_1}+\mathbf{2}\boldsymbol{Z_3}).\boldsymbol{Z_2}$

$$\mathbf{-3-4}\boldsymbol{i} -3\,(\mathbf{-2+2}\boldsymbol{i}) = \mathbf{3-10}\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{2+3}\boldsymbol{i}+2(\mathbf{-3-4}\boldsymbol{i}) = \mathbf{-4-5}\boldsymbol{i}$$

$$= (\mathbf{3-10}\boldsymbol{i})(\mathbf{-4-5}\boldsymbol{i}) \ = (\mathbf{-12+40}\boldsymbol{i}\mathbf{-15}\boldsymbol{i} \ \mathbf{+50}\boldsymbol{i}^2) = (\mathbf{-62+25}\boldsymbol{i})$$

$$= (\mathbf{-62+25}\boldsymbol{i})\,(\mathbf{-2+2}\boldsymbol{i}) = \quad (\mathbf{124-50}\boldsymbol{i} \ \mathbf{-124}\boldsymbol{i} \ \mathbf{+50}\boldsymbol{i}^2) = \mathbf{74} \ \mathbf{-174}\boldsymbol{i}$$

OPERACIONES

División de 2 números $\mathbb{C}$:

Dados dos números complejos

$$z_1 = a + bi \; ; \; z_2 = c + di$$

$$\rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo:

$z_1 = (3;4)$; $z_2 = 2 - 5i$. *Hallar* $\dfrac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2-5i}$$

$$= \frac{(3+4i)}{(2-5i)} \cdot \frac{(2+5i)}{(2+5i)}$$

$$= \frac{(6-20)+(15+8)i}{2^2+5^2}$$

$$= \frac{-14+23i}{29}$$

$$= -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$$

DIVISIÓN DE COMPLEJOS

Recuerde: ***Dado el complejo***: $Z_1 = 1 + i$

La conjugada se denota: $\overline{Z_1} = 1 - i$

Resolver:

$$\frac{2+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i+i-i^2} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2}+\frac{i}{2}$$

$$\frac{3+5i}{2-6i}\cdot\frac{2+6i}{2+6i} = \frac{6+18i+10i+30i^2}{4-36i^2} = \frac{-24+28i}{40} = -\frac{24}{40}+\frac{28i}{40}$$

Diferencia de Cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo 48. *Dados $z_1 = 3 + 5i$ y $z_2 = -4 + 3i$. Determine la suma, resta, multiplicación y división de estos números complejos.*

SOLUCIÓN:

$$z_1 + z_2 = -1 + 8i$$

$$z_1 - z_2 = 7 + 2i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 5i) \cdot (-4 + 3i) \\ &= (-12 - 15) + (9 - 20)i \\ &= -27 - 11i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(3 + 5i)}{(-4 + 3i)} \cdot \frac{(-4 - 3i)}{(-4 - 3i)} \\ &= \frac{(-12 - (-15)) + (-9 - 20)i}{16 + 9} \\ &= \frac{3 - 29i}{25} \\ &= \frac{3}{25} - \frac{29}{25}i \end{aligned}$$

3 FINALMENTE

Universidad Tecnológica del Perú

IMPORTANTE

1. Considerar en las operaciones de números complejos que el valor de $i^2 = -1$.
2. Para dividir hay que usar el conjugado del denominador.

Excelente tu participación

Recuerda que la práctica hace al maestro.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 2i$; $z_3 = -5 + i$. Determine el valor de:

$$M = (z_2)^2 - 3z_1 + 4\bar{z}_3 - \sqrt{-64} + i^{27}$$

SOLUCIÓN:

$$(3-2i)^2 = (3-2i)\,(3-2i)$$
$$= (9-4) + (-6-6)i$$

$$i^{27} = i^{6+3} \rightarrow i^3 = -i$$

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64i^2} = 8i$$

$$\bar{z}_3 = -5 - i$$

$$M = (z_2)^2 - 3z_1 + 4\bar{z}_3 - \sqrt{-64} + i^{27}$$

$$M = (3-2i)^2 - 3(2+3i) + 4(-5-i) - 8i + i^{27}$$

$$M = (5-12i) - (6+9i) + (-20-4i) - 8i - i$$

$$M = -21 - 34i$$

RPTA: $M = -21 - 34i$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $z_1 = -1 - 2i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 2$. Determine el valor de:

$$P = (z_3 - 2z_1)(2z_2 + z_1)$$

Dados dos números complejos

$$z_1 = a + bi \; ; \; z_2 = c + di$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} P &= (z_3 - 2z_1)(2z_2 + z_1) \\ &= [2 - (-2 - 4i)][(6 - 2i) + (-1 - 2i)] \\ &= [4 + 4i][5 - 4i] \\ &= (20 - (-16)) + (-16 + 20)i \\ &= 36 + 4i \end{aligned}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $Z_1 = (2{,}3i)$; $Z_2 = 3 - 2i$; $Z_3 = i$ Hallar: $Z_2 - 3Z_1 + 3Z_3 - \sqrt{-4} + i^3$

2. Sea $Z_1 = -1 - 2i$; $Z_2 = 3 - i$; $Z_3 = 2$ Hallar: $(Z_3 - 2Z_1)(2Z_2 + Z_1)$

3. Sea $Z_1: (2, i)$; $Z_2: (1{,}2i)$; $Z_3: (1, -i)$ Hallar: $[\frac{Z_2}{Z_3 - i} + \frac{Z_1}{Z_2}]Z_3$

EJERCICIO RETO

Sea $z_1 = 2 + i; z_2 = 1 + 2i; z_3 = 1 - i$. Determine el valor de $R = \left[\frac{z_2}{z_3 - i} + \frac{z_1}{z_2}\right] \cdot z_3$

Rpta: $R = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$

Universidad Tecnológica del Perú

¡Ahora todos a practicar!