ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

PLANOS PARALELOS Y PERPENDICULARES

Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica el Paralelismo y Ortogonalidad entre planos para resolver problemas de aplicación en Ingeniería, así como determina la intersección entre Planos y el ángulo Diedro.

Universidad Tecnológica del Perú

ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

PLANOS PARALELOS

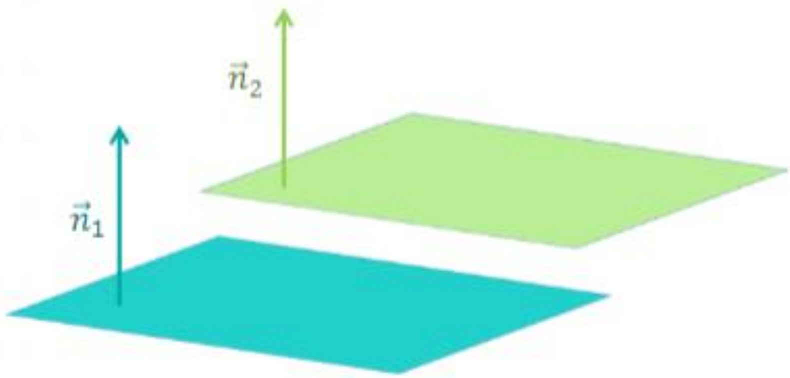
PLANOS PERPENDICULARES

PLANOS PARALELOS

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

$$P_1 // P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = \lambda \overrightarrow{n_2}$$

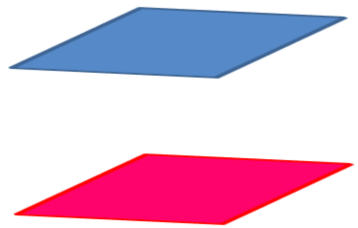
$$P_1 // P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = 0$$



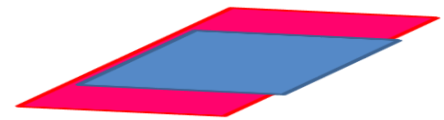
POSICIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS

Planos Paralelos

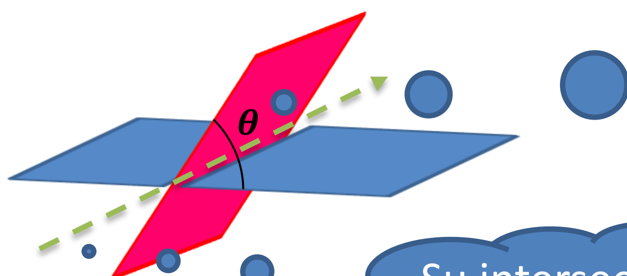
No se superponen



Se superponen



Planos No Paralelos



Su intersección es una recta

Forman un ángulo llamado Diedro y si es de 90º se dice que los Planos son ortogonales

Ejemplo.

Dados los Planos:

$\pi_1: 10x - 4y - 2z = 5$ y $\pi_2: (x, y, z) = (2,2,1) + \alpha(1,1,3) + \beta(1,2,1)$

¿Son Paralelos?

Hallo normal de π_2: $\vec{a} x \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 2j + k = (-5,2,1)$

Se reconoce la normal de π_1: (10,-4,-2) que equivale a $(-5,2,1)$, como las normales son paralelas, los planos son paralelos.

PLANOS PARALELOS

Al ser Paralelos ¿cómo saber si se superponen o no?

Concepto Previo

El punto $(2,2,1)$ ¿pertenece al Plano $10x - 4y - 2z = 5$

$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}$:

$$10x - 4y - 2z = 5$$

$$10(2) - 4(2) - 2(1) = 5$$

$$10 \neq 5$$ **No pertenece al Plano**

Si dos planos coinciden entonces un punto pertenece a ambos planos, de lo contrario no se superponen

EJERCICIO EXPLICATIVO

Dados los Planos: $\boldsymbol{\pi_1}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ **y**
$\boldsymbol{\pi_2}: \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{3}\boldsymbol{z} = \mathbf{4}$ ¿Son Paralelos? Y si son Paralelos ¿coinciden o no?

Hallando la normal de π_1

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 3j - 3k = (4, -3, -3)$$

Se reconoce la normal de $\pi_2 = (4, -3, -3)$ luego: las normales son Paralelas, entonces los planos son paralelos.

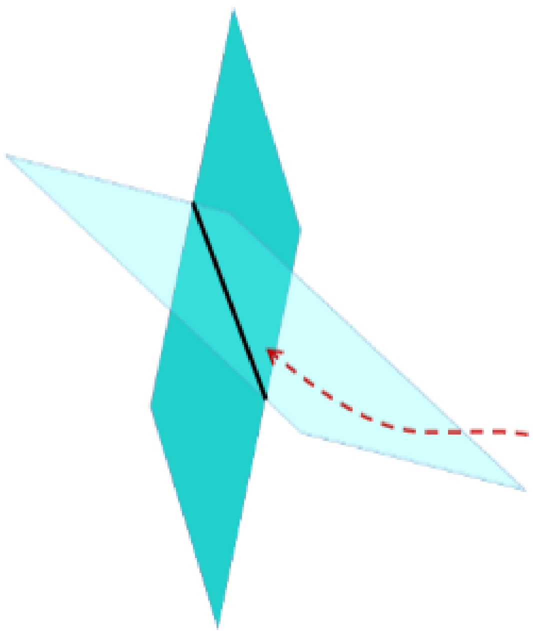
Serán coincidentes si el punto (1,2,1) del Plano π_1 pertenece al Plano π_2

$$4x - 3y - 3z = 4$$

$$4(1) - 3(2) - 3(1) = 4$$

$$-5 \neq 4$$

Al no pertenecer los Planos no coinciden



Observación

Al ser dos planos NO PARALELOS,
estos se intersecan en
el espacio.
El producto de dicha intersección genera
una recta en el espacio.

PLANOS NO PARALELOS

Si los Planos no son Paralelos de todas maneras se intersectan y forman un ángulo

Dados los Planos: $\boldsymbol{\pi_1: x + y - 2z = 6}$ y $\boldsymbol{\pi_2: 2x - 3y + z = 3}$

Se reconoce la normal de $\pi_1 = (1,1,-2)$ y $\pi_2 = (2,-3,1)$ luego: las normales no son Paralelas, entonces los Planos no son Paralelos y se intersectan.

Para hallar la intersección de Planos debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y - 2z = 6$$
$$2x - 3y + z = 3$$

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+y-2z-6= & 0 \\ 2x-3y+z-3=0 \end{cases}$$ dando valor a: z=λ $$\begin{cases} x+y= & 6+2\lambda \\ 2x-3y= & 3-\lambda \end{cases}$$

Resolviendo ecuación para eliminar la variable "y":

$$\begin{cases} 3x+3y = & 18+6\lambda \\ 2x-3y & =3-\lambda \end{cases}$$ 5x= 21 +5λ $\rightarrow$ x =$\frac{21+5\lambda}{5}$ x=$\frac{21}{5}$ +λ

Remplazando para hallar "y"

x+ y = 6+2 λ = $y=$ 6+2 $\lambda-\frac{21}{5}$ $-\lambda$ $\rightarrow$ y=$\frac{9}{5}$+λ

Ecuación paramétrica: $$\begin{cases} x=\frac{21}{5}+\lambda \\ y=\frac{9}{5}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

ÁNGULO ENTRE PLANOS NO PARALELOS

Luego los vectores no son paralelos

Se encuentra con las normales de ambos Planos

$$Cos\theta = \frac{n_1 . n_2}{\|n_1\| \|n_2\|}$$

Si $n_1 . n_2 = 0$ los Planos son ortogonales

$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}$: **Del Problema anterior que son Planos no Paralelos**

Se reconoce la normal de $\pi_1 = (1,1,-2)$ y $\pi_2 = (2,-3,1)$

$$Cos\theta = \frac{(1,1,-2).(2,-3.1)}{\sqrt{6}.\sqrt{14}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Luego: $\boldsymbol{\theta = arCos(-\frac{3}{2\sqrt{21}})}$

El signo indica que es un ángulo obtuso

Ejemplo 39. *Dados los planos* $P_1: x - y - z = 0$; $P_2: x - 2y + 3z - 1 = 0$ *no paralelos que se intersecan en el espacio.*

a) *Exprese la intersección (la recta resultante) entre los planos como un sistema de ecuaciones de ambos planos.*

b) *Determine el vector director de dicha recta.*

c) *Determine la ecuación paramétrica de dicha recta.*

SOLUCIÓN:

a) $L: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

b) $L: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

$$y - 4z = -1$$

$$y = 4z - 1 \ \wedge \ x - (4z - 1) - z = 0$$

$$x = 5z - 1$$

$$z = z$$

$$\vec{v} = (5, 4, 1)$$

Otro forma de hallar $\vec{v}$:

$$\vec{n}_1 = (1, -1, -1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, -2, 3)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = (-5, -4, -1)$$

c)

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0) + t(5,4,1)$$

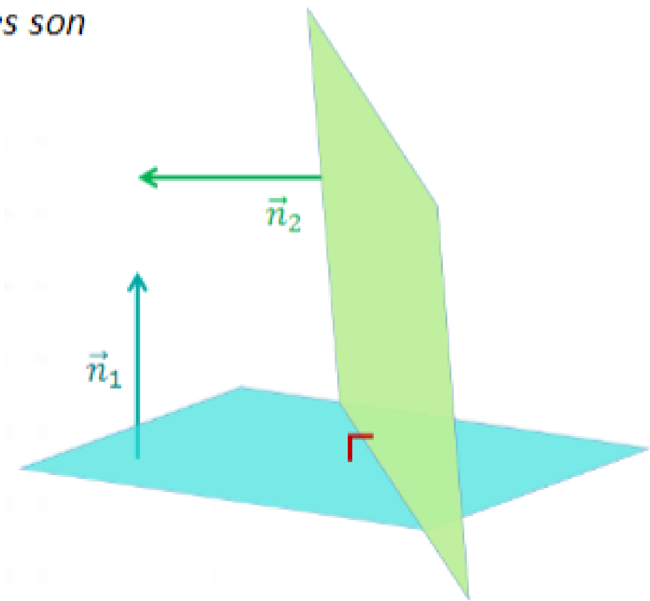
$$L: \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = 4t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

PLANOS PERPENDICULARES

Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$



Ejemplo 38. *Determine si los siguientes planos son paralelos u ortogonales.*

$$\mathcal{P}_1: x + 3y - 2z = 6$$

$$\mathcal{P}_2:\ P = (4,-3,2) + r(2,-2,4) + t(2,1,1)$$

SOLUCIÓN:

$$\vec{n}_1 = (1,3,-2)$$

$$\vec{n}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = (-6,6,6)$$

$$Si\ \vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2 \Longrightarrow \vec{n}_1 = \vec{n}_2$$

$$(1,3,-2) \neq \lambda(-6,6,6)$$ ✗ *No son paralelos*

$$Si\ \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(1,3,-2)\cdot(-6,6,6) = -6 + 18 - 12 = 0$$

✓ *Son ortogonales*

FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Planos paralelos.

   $P_1 \,//\, P_2 \Rightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

2. Planos perpendiculares:

   $Si\ P_1 \perp P_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

3. Ángulo entre planos:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}\right)$$

$$\theta = 180 - \beta$$

Excelente tu participación

Las dificultades me hacen más fuerte.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sean las rectas $L_1: \frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{2}$, $z = 3$ y $L_2: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$. Hallar la ecuación general de un plano que pasa por $A(-1, -1, 0)$ y es paralelo a las dos rectas.

SOLUCIÓN:

$$L: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} +$$

$$4x + y \quad = 0$$

$$y = -4x \Longrightarrow \quad x + 2(-4x) - z = 0$$

$$z = -7x$$

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = -7t \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \vec{n} = & \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -7 \end{vmatrix} = (-14, -35, 18) \end{array}$$

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0 \Rightarrow (-14, -35, 18) \cdot (x + 1, y + 1, z) = 0$$

$$-14x - 14 - 35y - 35 + 18z = 0$$

RPTA: $\mathcal{P}: 14x + 35y - 18z + 49 = 0$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

2. Encuentre la ecuación general del plano que pasa por la intersección de los planos

$P_1: x - z = 1$; $P_2: y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$

SOLUCIÓN:

$$L:\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$L:\begin{cases} 2x - 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$2x + y \cancel{} = 5$$

$$y = 5 - 2x$$

$$(5 - 2x) + 2z = 3$$

$$z = x - 1$$

$$L:\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \quad\ + \quad - \quad + \\ \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3, 3, 3) \end{array}$$

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0 \Longrightarrow (3,3,3) \cdot (x, y - 5, z + 1) = 0$$

$$3x + 3y - 15 + 3z + 3 = 0$$

$$3x + 3y + 3z - 12 = 0$$

RPTA: $\mathcal{P}: x + y + z - 4 = 0$

EJERCICIO RETO

Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto $(1;5;1)$ y es perpendicular a los planos

$$P_1: 2x + y - 2z = 2\ ;\ \ P_2: x + 3z = 4$$

$$P: 3x - 8y - z + 38 = 0$$

UTP

Universidad
Tecnológica
del Perú