

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

Rectas en R^3



Universidad
Tecnológica
del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante determina las distintas ecuaciones de la recta en el espacio e identifica el punto de paso y vector director en todas ellas. Así también determina la distancia de un punto a una recta o entre rectas.



Universidad
Tecnológica
del Perú

UTILIDAD

Ejemplo de aplicación a la ingeniería N.º 1. Propiedades de resistencia de un material

Considerando que Robert Hooke estableció la ley donde se relacionan de manera lineal las fuerzas (p) y deformaciones (δ) de los materiales, se ha realizado el ensayo de laboratorio de tres materiales, tal como se muestra en la gráfica 15.

Considerando dicha información se solicita analizar los resultados obtenidos con el primer material y definir:

- Hallar la pendiente de esta recta (m)
- El ángulo α que forma la recta con respecto al eje δ
- Ecuación punto pendiente
- Ecuación pendiente y ordenada al origen
- Ecuación general



Universidad
Tecnológica
del Perú

Arturo está cambiando un neumático. La llave es posicionada en uno de

los pernos de la rueda y hace un ángulo de 30° con la horizontal. Arturo ejerce una fuerza de 40 lb hacia abajo para aflojar el perno.

- Si la longitud del brazo de la llave es un pie, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?
- Si se cambia la llave por una de 18 pulgadas de longitud, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?

Solucion 7.

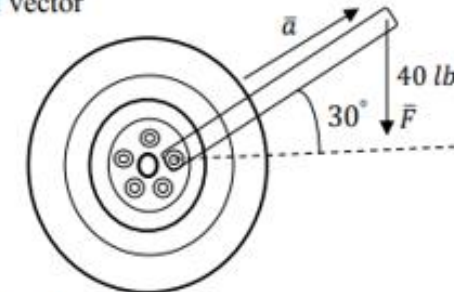
En la figura, el brazo de la llave es paralelo al vector

$$\vec{a} = (\|\vec{a}\|\cos\theta, \|\vec{a}\|\sin\theta, 0)$$

Y la fuerza está representada por el vector

$$\vec{F} = \|\vec{F}\|(0,1,0) = 40(0,1,0) = (0,40,0)$$

- Se desea hallar la cantidad de torque que se imparte al perno.



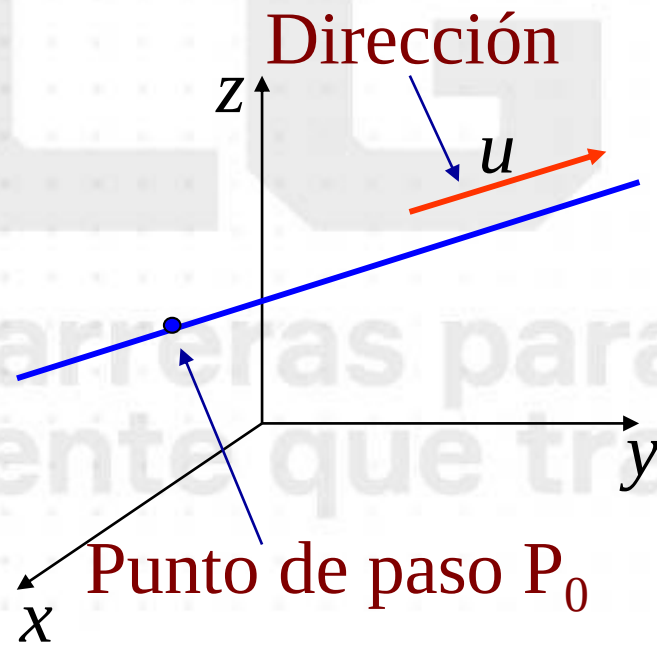
$$\text{Cantidad de torque} = \|\vec{a} \times \vec{F}\|$$

La longitud del brazo de la llave es $\|\vec{a}\| = 1$ pie, entonces

$$\vec{a} = \left((1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), (1)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Rectas en $\mathbb{R}^3$

Una recta en el espacio está bien determinada, si se especifica su dirección y uno de sus puntos.



Rectas en $\mathbb{R}^3$

Dado un punto del espacio (x_0, y_0, z_0) por donde pasa una recta y un vector dirección $\vec{v} = (a, b, c)$

Ecuación vectorial de L

$$L: P = P_0 + t\vec{v}$$

Aquella que pasa por un punto P_0 en la dirección de $\vec{v}$.

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(a; b; c)$$

Ecuación paramétrica:

Considerando que la ecuación vectorial se escribe de la siguiente forma:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

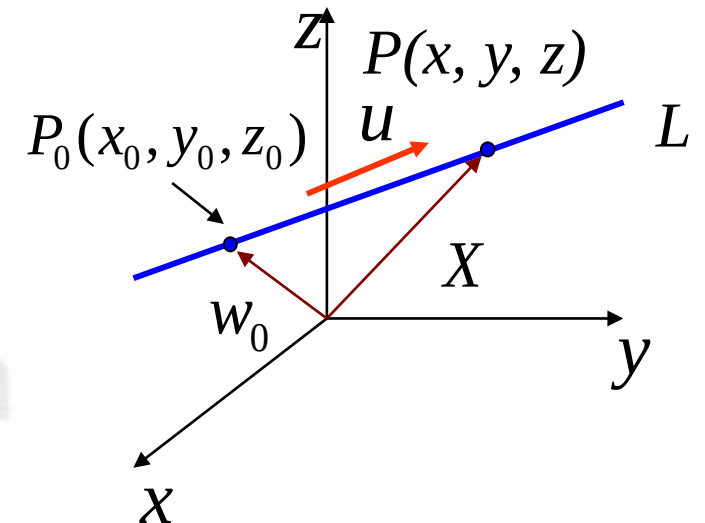
Se puede deducir la ecuación paramétrica como sigue:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuación simétrica o continua

Es aquella ecuación que resulta de despejar el parámetro t en cada una de las ecuaciones paramétricas para luego igualarlas, observemos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



Ejercicios explicativos

1. Obtén las formas vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por estos puntos:
A(2, 3, -1) y B(1, -3, 0).

Solución:

Punto Inicial: A (2, 3, -1)

Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -6, 1)$

Ecuación Vectorial : $(x, y, z) = (2, 3, -1) + t(-1, -6, 1)$

Ecuación Paramétrica:
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Ecuación Simétrica:
$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 3}{-6} = \frac{z + 1}{1}$$

2. Obtén las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos:

$$A(-5, 3, 7) \text{ y } B(2, -3, 3).$$

Solución:

Punto Inicial: $A(-5, 3, 7)$

Vector director: $\overrightarrow{AB} = B - A = (7; -6, -4)$

Ecuación Paramétrica.

$$x = -5 + 7t$$

$$y = 3 - 6t$$

$$z = 7 - 4t$$



$$\frac{x+5}{7} = t$$

$$\frac{y-3}{-6} = t$$

$$\frac{z-7}{-4} = t$$

Se despeja t en cada ecuación

Ecuación simétrica o continua:

$$\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-7}{-4}$$

3. Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple las siguientes condiciones:

Pasa por el punto $A(3,4,0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

❖ Solución:

Un vector director será $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} k = (4i + 5j + 2k) = (4, 5, 2).$$

Con el vector director y el punto A,

construimos:

Ecuación paramétrica y continua.

$$l_1: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad l_1 = \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$$

Ejercicio de aplicación

Ejemplo 32. Determine la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(2, -2, -3)$ y $B(-1, 4, -2)$. Encuentre un punto adicional y la intersección con el plano XZ .

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4, -2) - (2, -2, -3) = (-3, 6, 1)$$

Ecuación Vectorial

$$P = (2, -2, -3) + t(-3, 6, 1)$$

Ecuación Paramétrica

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Ecuación Simétrica

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-(-2)}{6} = \frac{z-(-3)}{1}$$
$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{6} = z+3$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = 2$$

$$P = (2, -2, -3) + (2)(-3, 6, 1)$$

$$P = (-4, 10, -1)$$

$$L \cap XZ \Rightarrow y = 0$$

$$0 = -2 + 6t$$

$$\frac{1}{3} = t$$

$$P = (2, -2, -3) + \left(\frac{1}{3}\right)(-3, 6, 1)$$

$$L \cap XZ = \left(1, 0, -\frac{8}{3}\right)$$

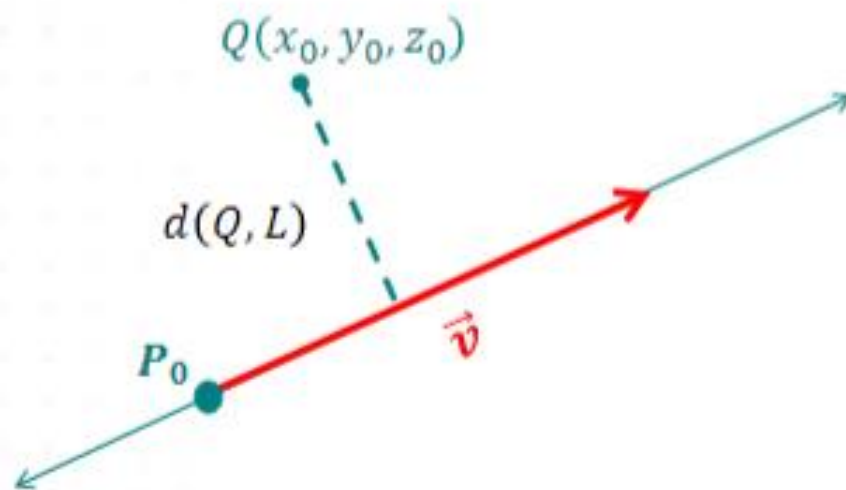


Universidad
Tecnológica
del Perú

DISTANCIA de un Punto a una Recta en el Espacio

La distancia de un punto $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ a la recta $L: P = P_0 + t\vec{v}$ se determina:

$$d(Q, L) = \sqrt{\|\vec{P_0Q}\|^2 - \left(\frac{\vec{P_0Q} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2}$$

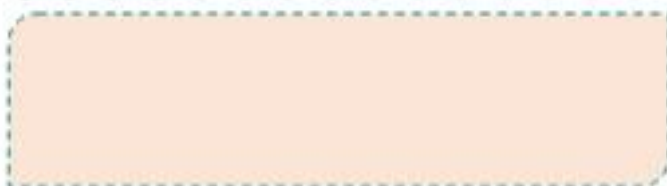


Ejercicio de aplicación

Hallar la distancia desde el punto $Q(3, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ a la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-5}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-5} \rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (3, 4, -5) \\ P_0 = (2, 1, 2) \end{cases}$$



$$\overrightarrow{P_0Q} = (3, 2, 0) - (2, 1, 2) = (1, 1, -2)$$

$$\|\overrightarrow{P_0Q}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{v} = (1, 1, -2) \cdot (3, 4, -5)$$

$$= 3 + 4 + 10 = 17$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

$$\begin{aligned} d(Q, L) &= \sqrt{\sqrt{6}^2 - \left(\frac{17}{\sqrt{50}}\right)^2} \\ &= \sqrt{6 - \frac{17^2}{50}} = \frac{\sqrt{22}}{10} \end{aligned}$$

RPTA: $d(Q, L) = \frac{\sqrt{22}}{10}$

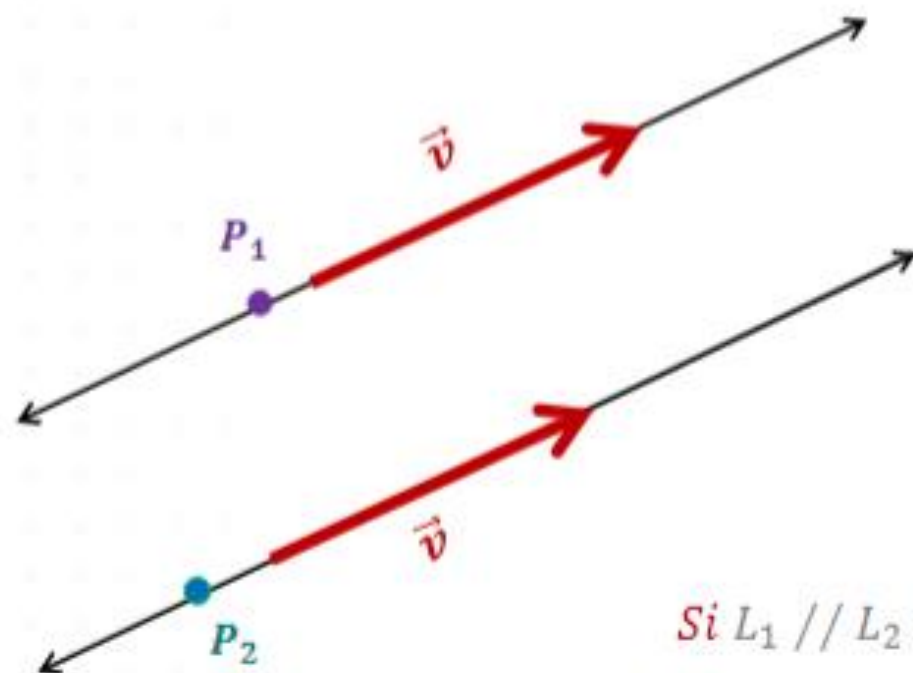


Universidad
Tecnológica
del Perú

DISTANCIA entre dos Rectas Paralelas

Dadas las rectas paralelas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}$ y $L_2: P = P_2 + t\vec{v}$, la distancia entre ambas rectas está determinada por la fórmula anterior, considerando un punto de una de las rectas (en este caso $P_1 \in L_1$), es decir:

$$d(P_2, L_1) = \sqrt{\|\vec{P_1P_2}\|^2 - \left(\frac{\vec{P_1P_2} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2}$$

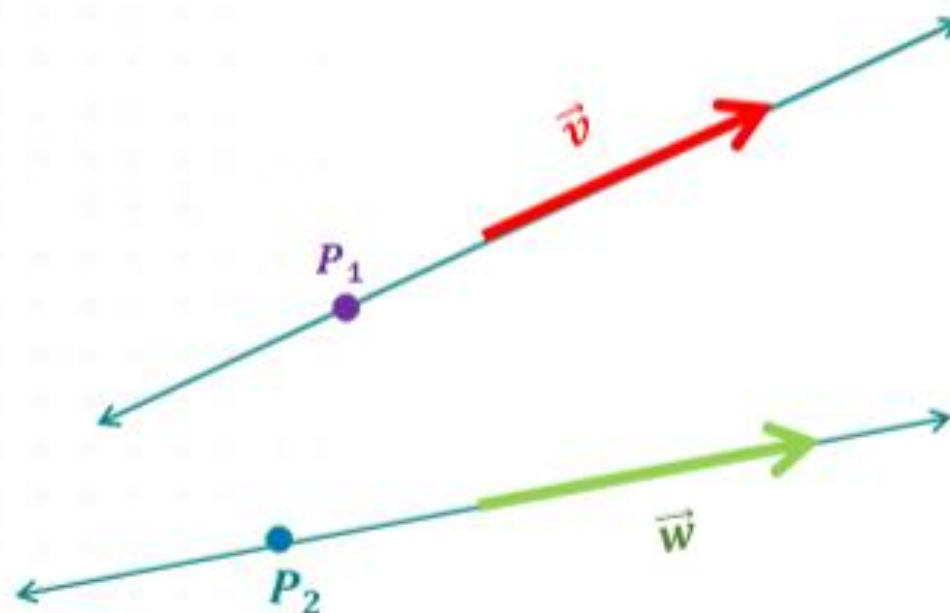


Si $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

DISTANCIA entre dos Rectas NO Paralelas

Dadas las rectas no paralelas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}$ y $L_2: P = P_2 + t\vec{w}$, la distancia entre ambas rectas está determinada por:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$$



Ejercicio de aplicación Hallar la distancia entre las rectas:

$$L_1: x = -4 ; y + z = 6 \quad y \quad L_2: P = (1, 2, -2) + t(0, 2, 1)$$

SOLUCIÓN:

$$L_1: x = -4 ; y + z = 6$$

$$L_1: \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = (-4, 6, 0) \\ \vec{v} = (0, -1, 1) \end{cases}$$

$$L_2: P = (1, 2, -2) + t(0, 2, 1) \rightarrow \begin{cases} P_2 = (1, 2, -2) \\ \vec{w} = (0, 2, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, -2) - (-4, 6, 0) = (5, -4, -2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (-3, 0, 0)$$


$$d(Q, L) = \frac{|(5, -4, -2) \cdot (-3, 0, 0)|}{\|(-3, 0, 0)\|}$$
$$= \frac{|-15|}{\sqrt{9}} = 5$$

RPTA: $d(Q, L) = 5$



Universidad
Tecnológica
del Perú

ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

**RECTAS
PARALELAS**

**RECTAS
ORTOGONALES**



PARALELISMO ENTRE RECTAS

Dadas las rectas en el espacio $l_1: (x, y, z) = P_0 + \alpha \vec{a}$ y $l_2: (x, y, z) = Q_0 + \beta \vec{b}$

$$\text{Si } \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow L_1 \parallel L_2 \quad L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \mathbf{0}$$

Ejemplo 35. Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 4)$ y es paralela $L_1: x = 3t$; $y = -2 + 4t$; $z = -5t$

SOLUCIÓN:

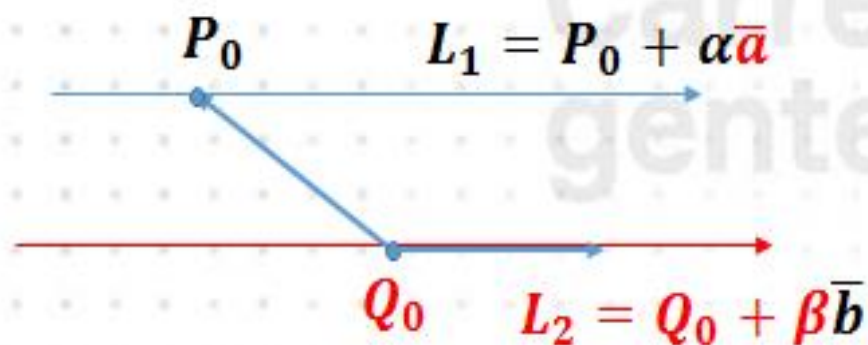
$$\vec{v} = (3, 4, -5)$$

RPTA:
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-5}$$

Si las rectas son Paralelas pueden suceder dos casos.

No se
superponen

Se
superponen



Universidad
Tecnológica
del Perú

Un punto pertenece a una recta

Dado una recta en el espacio $l_1: (x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(1, 3, 4)$

¿Cómo saber si $Q = (3, 2, 4)$ o $P = (5, 11, 13)$ pertenecen a la recta?

$$(3, 2, 4) = (2, 2, 1) + \alpha(1, 3, 4)$$

$$(1, 0, 3) = \alpha(1, 3, 4)$$

No existe un real “ α ” que iguale los vectores, por lo tanto “ Q ” no pertenece a la recta

$$(5, 11, 13) = (2, 2, 1) + \alpha(1, 3, 4)$$

$$(3, 9, 12) = \alpha(1, 3, 4)$$

Existe un real “ $\alpha = 3$ ” que iguale los vectores, por lo tanto “ P ” pertenece a la recta

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Dadas las rectas: $l_1 = (1,2,1) + \alpha(2,-1,3)$; $l_2 = (4,-2,1) + \beta(-6,3,-9)$

¿son paralelas? si lo fueran ¿se superponen o no?

$(2,-1,3) = k(-6,3,-9)$ Para $k = -\frac{1}{3}$ los vectores son iguales

se superponen



El punto de paso de la primera recta $(1,2,1)$ pertenece a ambas rectas

El punto de paso de la primera recta $(1,2,1)$ no pertenece a ambas rectas

No se superponen



Si un punto pertenece a una recta se debe cumplir:

$$(1,2,1) = (4,-2,1) + \beta(-6,3,-9)$$

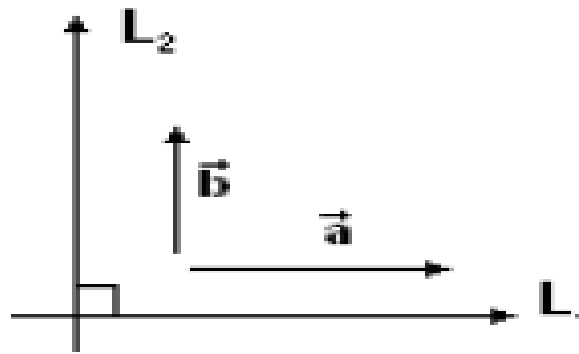
$$(-3,4,0) = \beta(-6,3,-9)$$

No existe un Beta (β) que iguale los vectores por lo tanto las rectas son paralelas pero no se superponen.

RECTAS ORTOGONALES

La Recta $L_1: (x, y, z) = P_0 + \alpha \vec{a}$ y la recta $L_2: (x, y, z) = Q_0 + \beta \vec{b}$ son ortogonales si y sólo si; sus vectores direccionales son ortogonales, es decir:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow L_1 \perp L_2$$



EJERCICIO EXPLICATIVO

Problema: Dadas las rectas: $L_1 = (2,2,4) + \alpha(5, -2,5)$ y $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{1+y}{5} = \frac{z+4}{-1}$

a) ¿Son Paralelas? b) ¿Son Ortogonales?

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \quad \vec{a} \perp \vec{b} = \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$$
$$L_1 \begin{cases} \text{Punto} & : A = (2,2,4) \\ \text{Vector director: } \vec{d}_1 & = (5, -2, 5) \end{cases}$$
$$L_2 \begin{cases} \text{Punto} & : B = (2, -1, -4) \\ \text{Vector director: } \vec{d}_2 & = (3, 5, -1) \end{cases}$$

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (5, -2, 5) \cdot (3, 5, -1) = 15 - 10 - 5 = 0$$

Las dos rectas **son Ortogonales**.

EJERCICIO EXPLICATIVO

Problema: Dadas las rectas: $L_1 = (2,2,4) + \alpha(5,-2,5)$ y $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{1+y}{5} = \frac{z+4}{-1}$

a) ¿Son Paralelas? b) ¿Son Ortogonales?

Carreras para
gente que trabaja

ÁNGULO ENTRE 2 RECTAS

Si dos rectas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}$; $L_2: P = P_2 + t\vec{w}$ en el espacio no son paralelas, existe la posibilidad que se crucen (presentes en distintos planos) o que se intersecten (presentes en un mismo plano). En cualquiera de los casos, existe un ángulo entre dichas rectas y esta definido por:

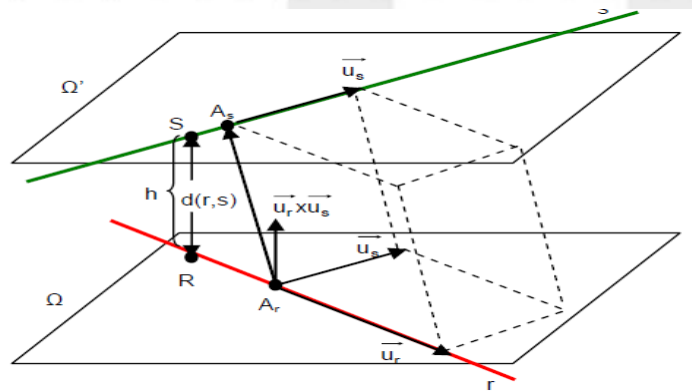
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}\right)$$

Si el ángulo es de 90° las rectas son ortogonales $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

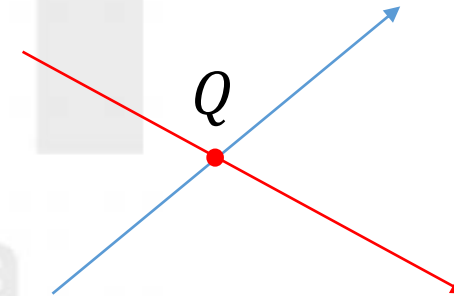
POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS NO PARALELAS

Cuando las rectas no son Paralelas puede suceder dos casos.

Que las rectas se cruzan o intersectan



Se cruzan



Se
intersectan

POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS NO PARALELAS

¿Cómo saber si se cruzan o se intersectan?

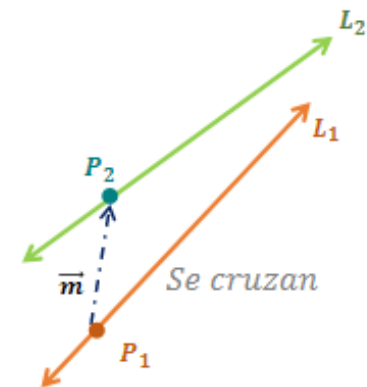
Dadas las rectas en el espacio $l_1: (x, y, z) = P_1 + \alpha \vec{a}$ y $l_2: (x, y, z) = P_2 + \beta \vec{b}$

Debe formar una matriz donde; en la primera fila debe poner la diferencia de los puntos de paso y luego los vectores dirección.

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

Previamente a probado que no son Paralelos $\vec{a} \times \vec{b} \neq (0,0,0)$

Si el determinante de la matriz es
cero se interceptan y si es diferente
de cero se cruzan



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Dadas las rectas: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$

¿Son Paralelas? Si no lo son ¿se cruzan o intersectan?

Solución:

Se reconocen de las rectas: $r: P_0 = (1,2,1)$ y $\vec{a} = (1,1,2)$ y de $s: Q_0 = (3,3,-1)$ y

$$\vec{b} = (-2, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = Q_0 - P_0 = (3,3,-1) - (1,2,1) = (2,1,-2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 6j + k$$

Luego los vectores no son paralelos

Si $\vec{a} \times \vec{b} = (0,0,0)$, vectores paralelos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \text{Det} = 0$$

Luego las rectas se intersectan



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

¿Cómo hallamos el punto de intersección de dos rectas que se intersectan?

Dadas las rectas: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Al determinar que se intersectan **una ecuación debe estar en Simétrica** y la otra en **Paramétrica**.

Se reconoce en una de las rectas: $s: Q_0 = (3,3,-1)$ y $\vec{b} = (-2,-1,2)$ luego:

$$(x,y,z) = (3,3,-1) + \alpha(-2,-1,2) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}$$

Reemplazamos estas variables en la otra recta

$$\frac{3 - 2\alpha - 1}{1} = \frac{3 - \alpha - 2}{1} = \frac{-1 + 2\alpha - 1}{2}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

$$\frac{3 - 2\alpha - 1}{1} = \frac{3 - \alpha - 2}{1} = \frac{-1 + 2\alpha - 1}{2}$$

Elija dos cualesquiera y elimine la tercera y resuelva

$$\frac{3 - 2\alpha - 1}{1} = \frac{3 - \alpha - 2}{1}$$

$$\alpha = 1$$

Al reemplazar este valor en la ecuación Paramétrica

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha = 1 \\ y = 3 - \alpha = 2 \\ z = -1 + 2\alpha = 1 \end{cases}$$

Son las
coordenadas del
punto de
intersección

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Dadas las rectas de ecuación $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ y $s: (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, 1, -2)$.

- a) ¿Son Paralelas u Ortogonales?
- b) De no ser paralelas ¿se cruzan o interceptan?
- c) Si se cruzan halle la distancia entre rectas

Solución:

Se reconocen de las rectas: $r: P_0 = (0, 1, 2)$ y $\vec{a} = (2, 1, 2)$ y de $s: Q_0 = (2, 0, 1)$ y $\vec{b} = (1, 1, -2)$
 $\overrightarrow{P_0 Q_0} = Q_0 - P_0 = (2, 0, 1) - (0, 1, 2) = (2, -1, -1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 6j + k = (-4, 6, 1)$$

Los vectores no son paralelos

Si $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0)$ Vectores Paralelos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 1, 2) \cdot (1, 1, -2) = -1$$

Luego los vectores no son ortogonales

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, los vectores son ortogonales



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \text{Det} = -15$$

Luego las rectas se Cruzan

Si el Det=0, las rectas se intersectan

La distancia entre las rectas es el cociente entre el valor del determinante y el módulo del producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 6j + k = (-4, 6, 1) \Rightarrow \sqrt{53}$$

$$\text{Distancia} = \frac{15}{\sqrt{53}}$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{A_r A_s}, \vec{u_r}, \vec{u_s}|}{\|\vec{u_r} \times \vec{u_s}\|}$$

valor
Absoluto

3 FINALMENTE



IMPORTANTE

1. Los elementos importantes para una recta son: un punto de paso y un vector director.
2. Las rectas paralelas pueden tener el mismo vector director.
3. Distancia entre punto y recta, distancia entre rectas.



Excelente tu participación

Recuerda que, siempre parece imposible, hasta que se hace.



Esta sesión quedará grabada para tus consultas.



PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de esta sesión y práctica con la tarea.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Hallar todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B\left(-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y encuentre otros dos puntos.

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(-2, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \vec{v} = (-6, 1, -4)$$

Ec. Vectorial: $P = (1, 0, 2) + t(-6, 1, -4)$

Ec. Paramétrica:
$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

Ec. Simétrica:
$$\frac{x-1}{-6} = y = \frac{z-2}{-4}$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

$$t = 1 \quad P_1(-5, 1, -2)$$

$$t = 2 \quad P_2(-11, 2, -6)$$

4. Dadas las siguientes rectas L_1 que pasa por $A(3, 2, 1)$ y $B(-1, 2, -1)$ y L_2 que pasa por $C(2, -2, 7)$ y $D(5, -2, 1)$. Determine si son paralelas u ortogonales



Carreras para
gente que trabaja



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIO RETO

Determine la ecuación vectorial y paramétrica de la recta que pasa por el punto $(0, 14, -10)$ y es paralela a la recta $L: x = -1 + 2t; y = 6 - 3t; z = 3 + 9t$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-14}{-3} = \frac{z+10}{9}$$



Universidad
Tecnológica
del Perú

EJERCICIO RETO

Dadas las siguientes rectas L_1 que pasa por $A(3; 2; 1)$ y $(-1; 2; -1)$ y L_2 que pasa por $C(2; -2; 7)$ y $D(5; -2; 1)$. Determine si las rectas son paralelas u ortogonales.

RPTA: Son ortogonales