Introducción a la Matemática para la Ingeniería

Unidad:

Vectores, rectas y plano en R^2 y R^3

Docente: Jaime Fernández Caycho

Logro

Al finalizar la unidad el estudiante utiliza los conceptos sobre vectores y rectas así como la ecuación del plano en la resolución de problemas aplicados a la ingeniería

Importancia

Al estudiar magnitudes como la mecánica, el trabajo o el magnetismo no es suficiente conocer su valor numérico también es necesario conocer su dirección y módulo. Los vectores aportan en la determinación de la dirección y de cálculos de resultantes.

La recta y el plano son otros dos conceptos que se usan en ingeniería hidráulica, ingeniera civil , economía y otras ciencias donde se trata de explicar la relación entre dos variables (R^2) o tres variables (R^3)

Contenido general

- Vectores en R^2
- La Recta en R^2
- Vectores en R^3
- La Recta en R^3
- El Plano

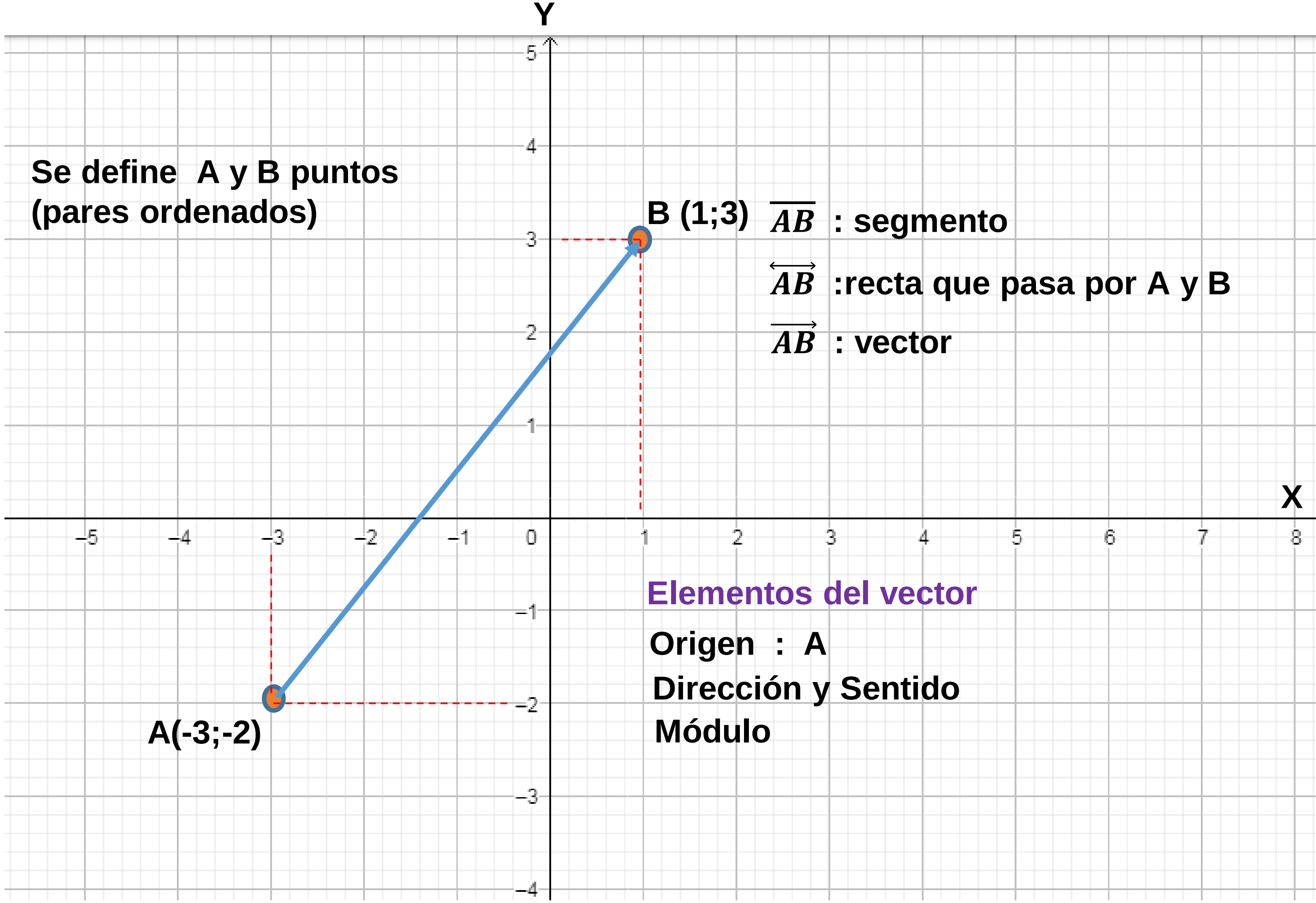
Vectores Rectas y Planos en R^2 y R^3

- Vectores en R^2
- La recta en R^2
- Vectores en R^3
- La recta en R^3
- El Plano

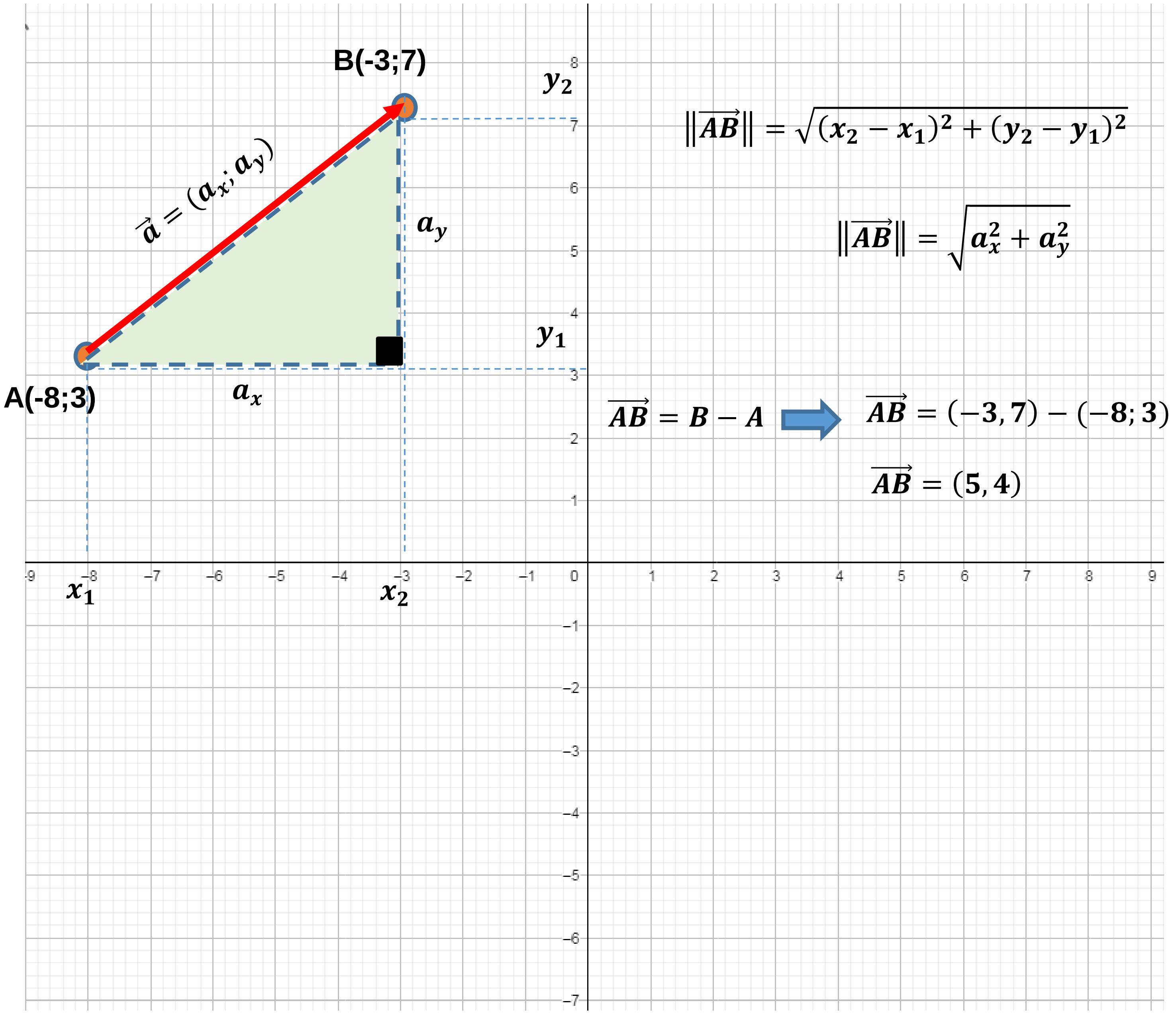
Vectores en R^2

- Plano Cartesiano, par ordenado. Vector. Plano vectorial Bidimensional. Representación del vector como segmento orientado.
- Modulo, aplicación del módulo como distancia entre dos puntos. // Vector unitario. Vectores canónicos (i,j).
- Igualdad de vectores. Adición y Diferencia de vectores.
- Multiplicación de un escalar por un vector.
- Ortogonalidad y Paralelismo (Aplicación en puntos de corte).
- Producto escalar. Vectores Ortogonales y ángulo entre vectores. Ángulo de inclinación de un vector (aplicación a resultante de fuerzas). Proyección Ortogonal y Componente entre vectores.

Plano cartesiano y vector



Definición y módulo de un vector



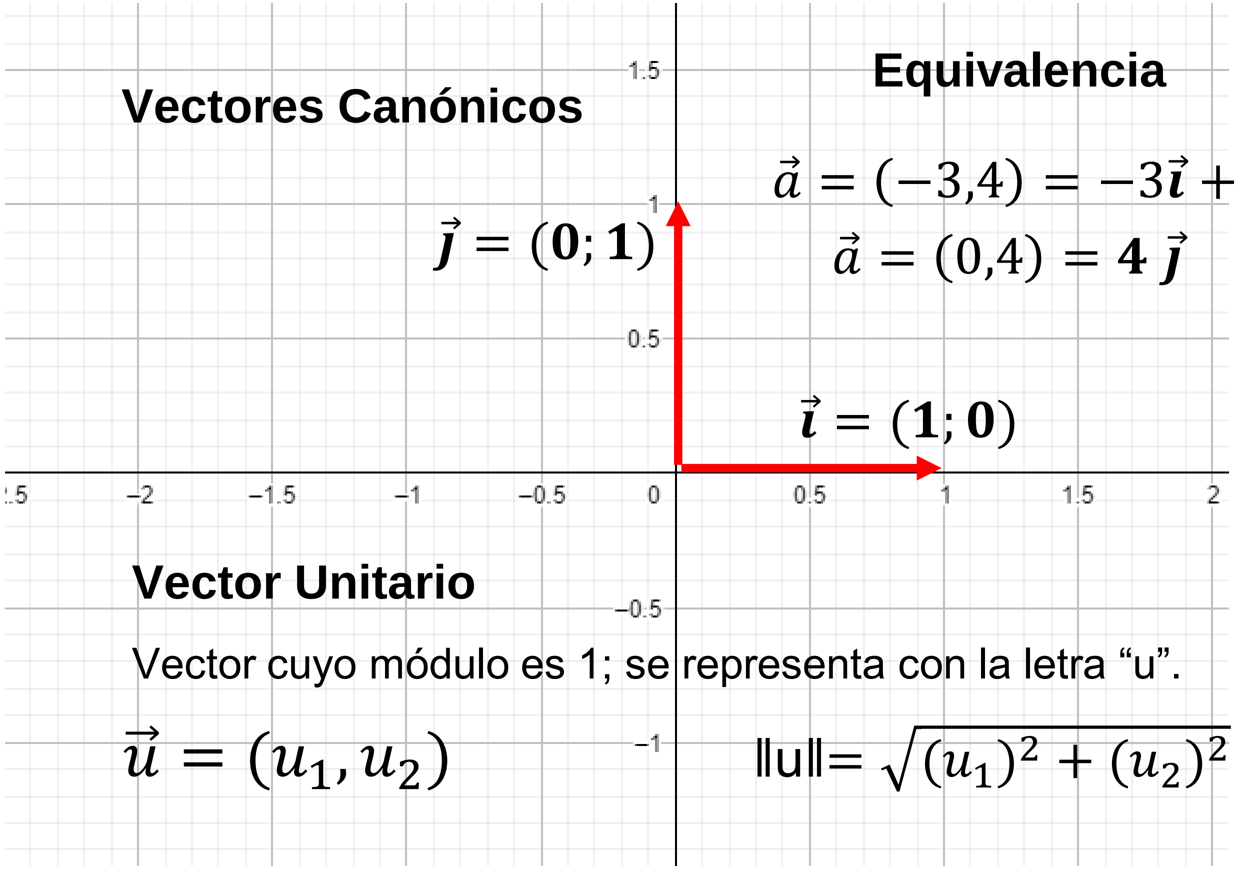
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3, 7) - (-8; 3)$

$\overrightarrow{AB} = (5, 4)$

Vector unitario y vectores canónicos



Vectores Canónicos

$\vec{\boldsymbol{j}} = (\mathbf{0}; \mathbf{1})$

$\vec{\boldsymbol{i}} = (\mathbf{1}; \mathbf{0})$

Equivalencia

$\vec{a} = (-3{,}4) = -3\vec{\boldsymbol{i}} + \mathbf{4}\,\vec{\boldsymbol{j}}$

$\vec{a} = (0{,}4) = \mathbf{4}\,\vec{\boldsymbol{j}}$

Vector Unitario

Vector cuyo módulo es 1; se representa con la letra “u”.

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

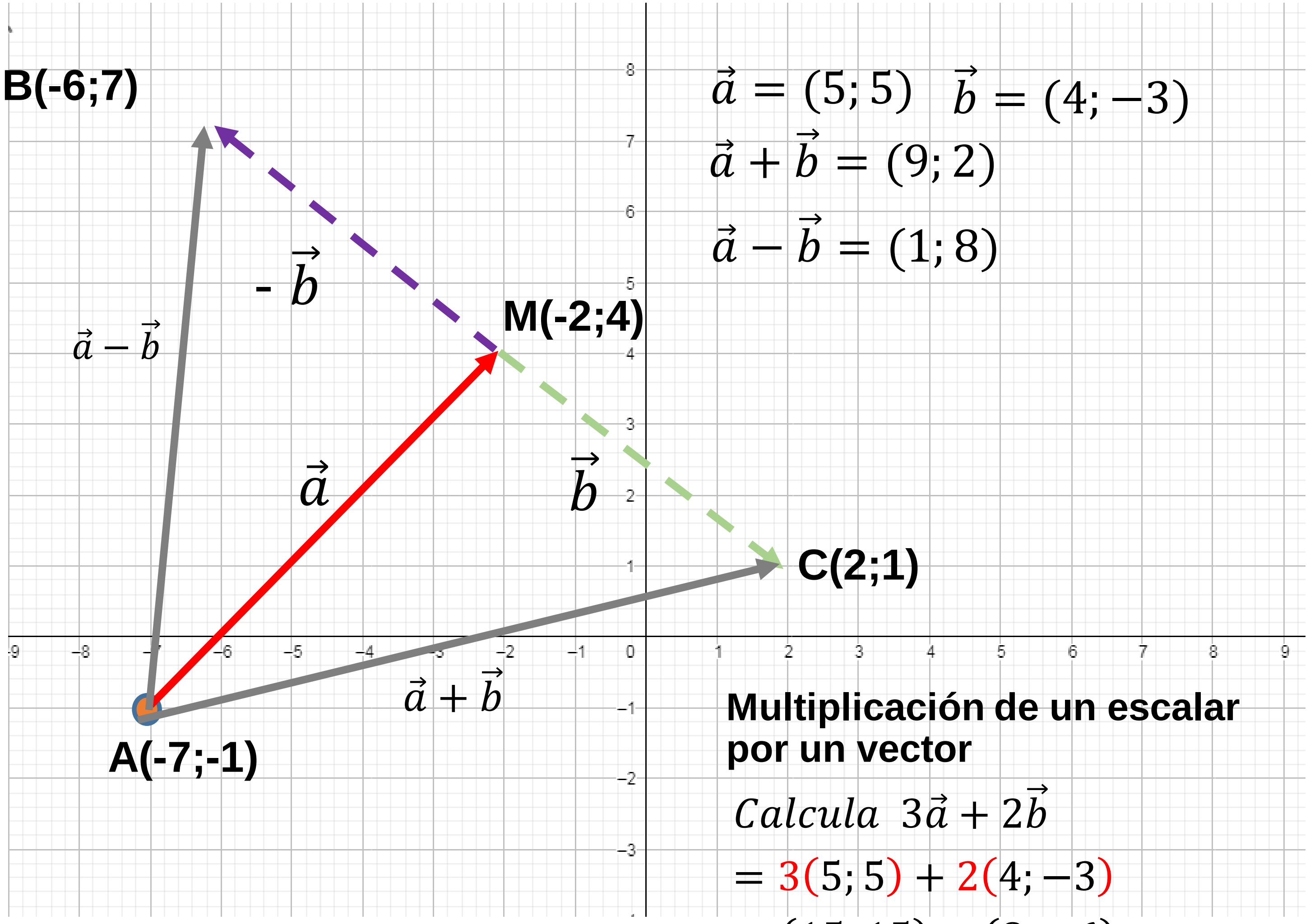
‖u‖$= \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2} = 1$

Para cualquier vector

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\overrightarrow{u_a} = \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}; \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}\right)$$

Suma y resta de vectores



$\vec{a} = (5;5)$ $\vec{b} = (4;-3)$

$\vec{a}+\vec{b} = (9;2)$

$\vec{a}-\vec{b} = (1;8)$

Multiplicación de un escalar por un vector

$Calcula\ \ 3\vec{a}+2\vec{b}$

$= 3(5;5) + 2(4;-3)$

$= (15;15) + (8;-6)$

$= (23;9)$

Paralelismo y Ortogonalidad de vectores

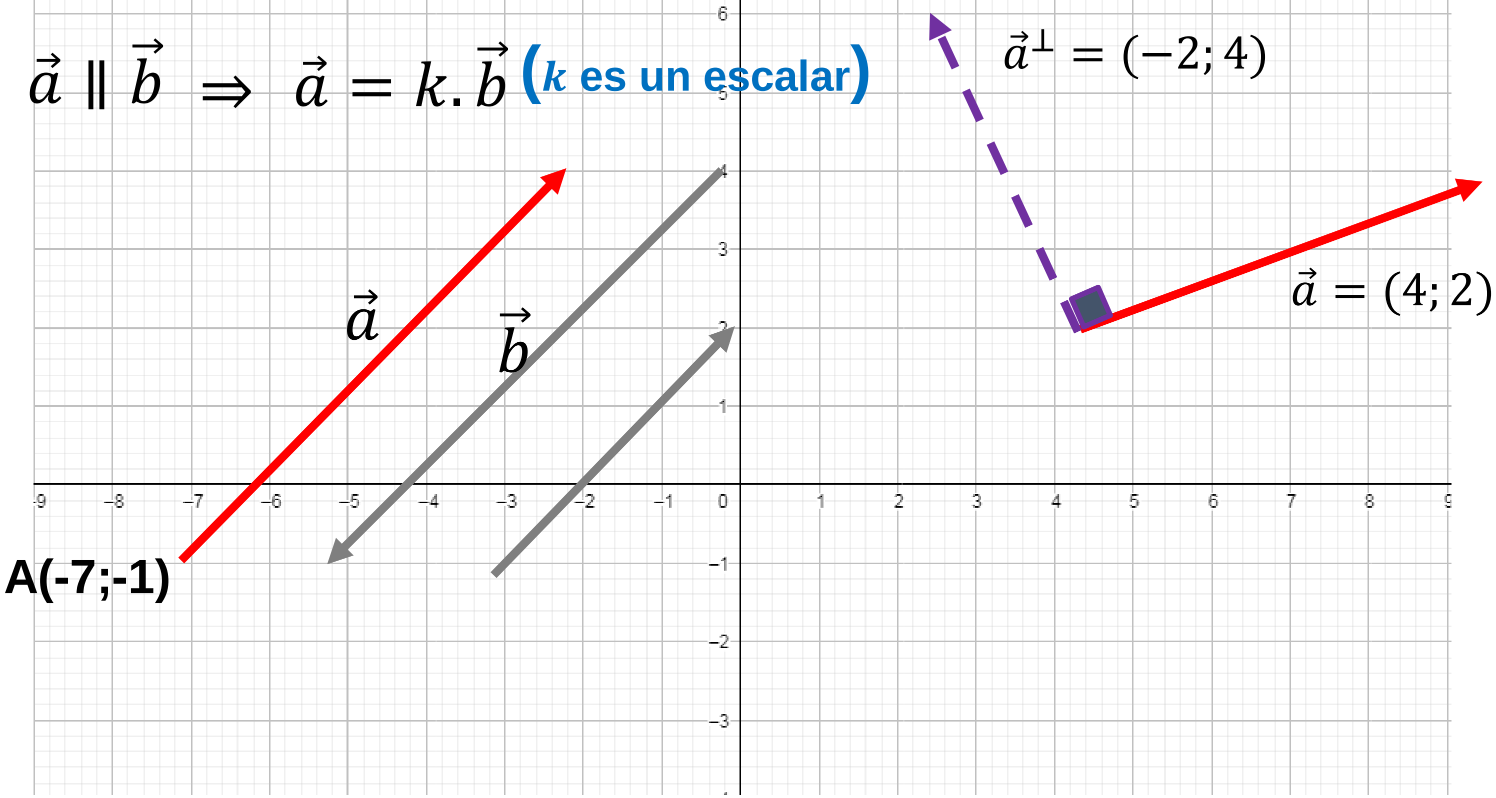
Paralelismo

Dos vectores Paralelos se representan como: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

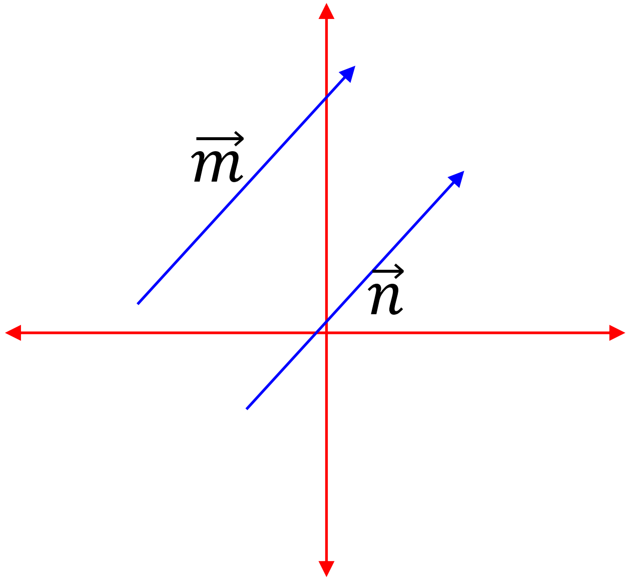
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = k.\vec{b}\ (k \text{ es un escalar})$$

Vectores ortogonales

$$\vec{a} = (a_1; a_2) \Rightarrow \vec{a}^{\perp} = (-a_2; a_1)$$

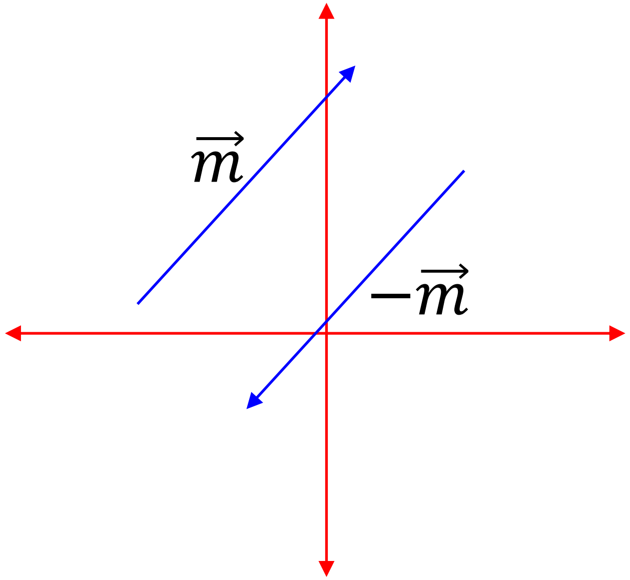


Vectores iguales



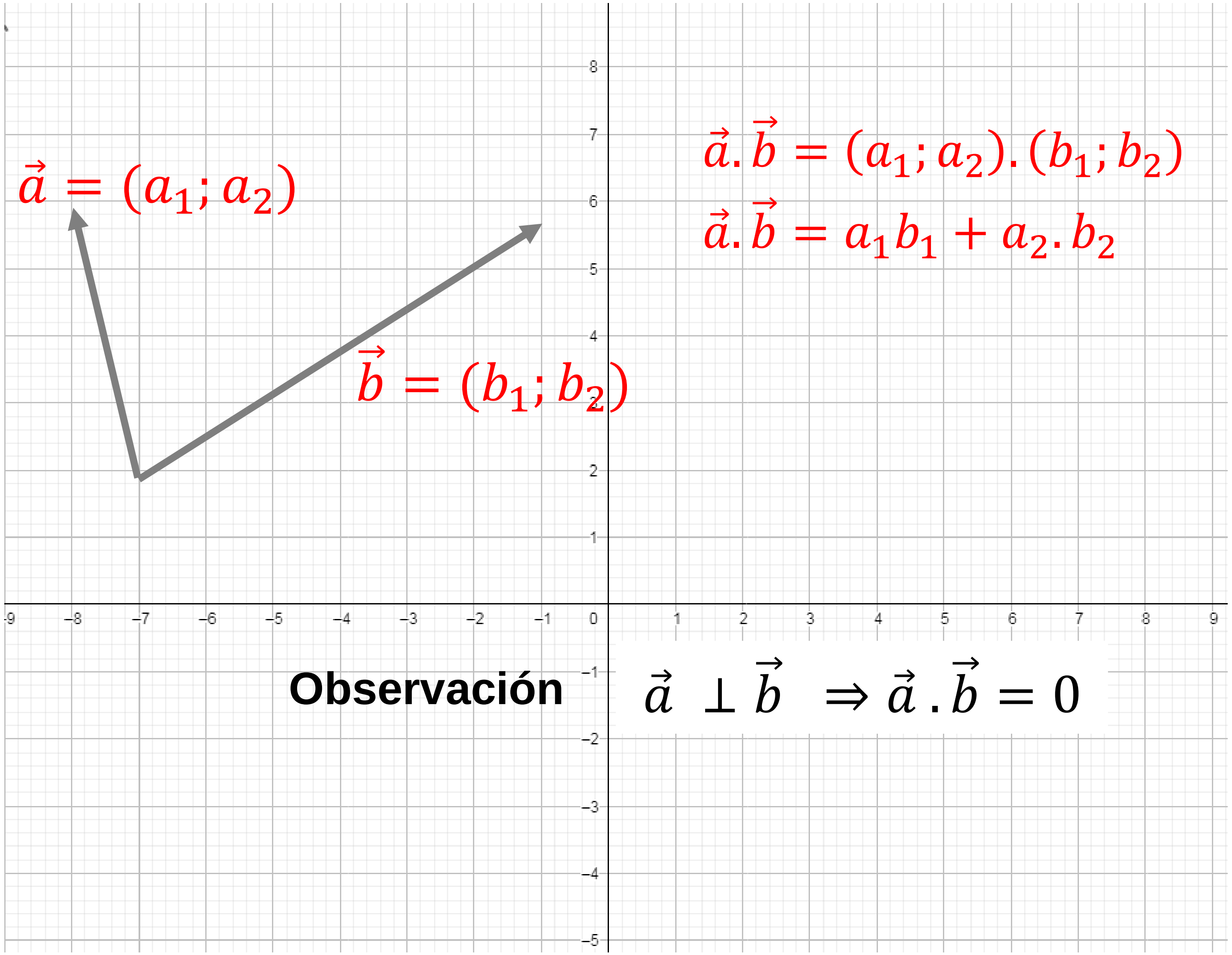
Los vectores $\vec{\boldsymbol{m}}\ y\ \vec{\boldsymbol{n}}\ son\ iguales:$
$Igual\ \ módulo\ , dirección\ y\ sentido$
El origen puede ser diferente

Vector Opuesto



Dado el vector $\vec{\boldsymbol{m}} = (5,7)$; definimos el vector opuesto como $-\vec{\boldsymbol{m}}$. Geométricamente mantiene el módulo y la dirección pero cambia el sentido.

Producto escalar de vectores



$\vec{a} = (a_1; a_2)$

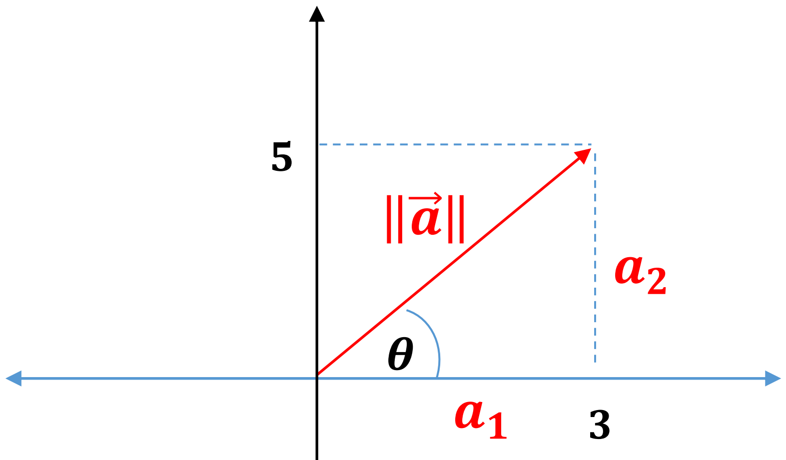
$\vec{b} = (b_1; b_2)$

$\vec{a}.\vec{b} = (a_1; a_2).(b_1; b_2)$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2.b_2$

Observación $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

Descomposición de un vector



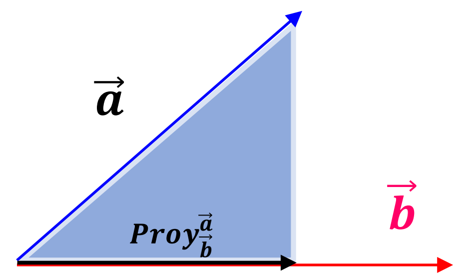
$$Cos\theta = \frac{a_1}{\|a\|} \quad \Rightarrow a_1 = \|a\|\mathrm{Cos}\theta$$

$$sen\theta = \frac{a_2}{\|a\|} \quad \Rightarrow a_2 = \|a\|\mathrm{sen}\theta$$

Angulo de Inclinación

$$\mathbf{tan}\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_1}} \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \mathbf{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_1}}\right)$$

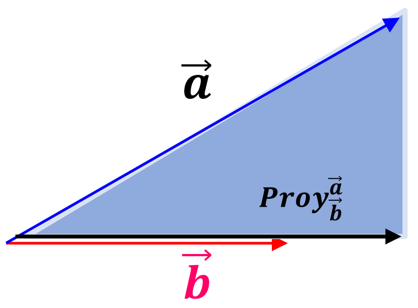
Proyección ortogonal



La sombra que proyecta el vector $\vec{a}$ sobre $\bar{b}$, le decimos proyección ortogonal

Denota: $Proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b}$

Componente



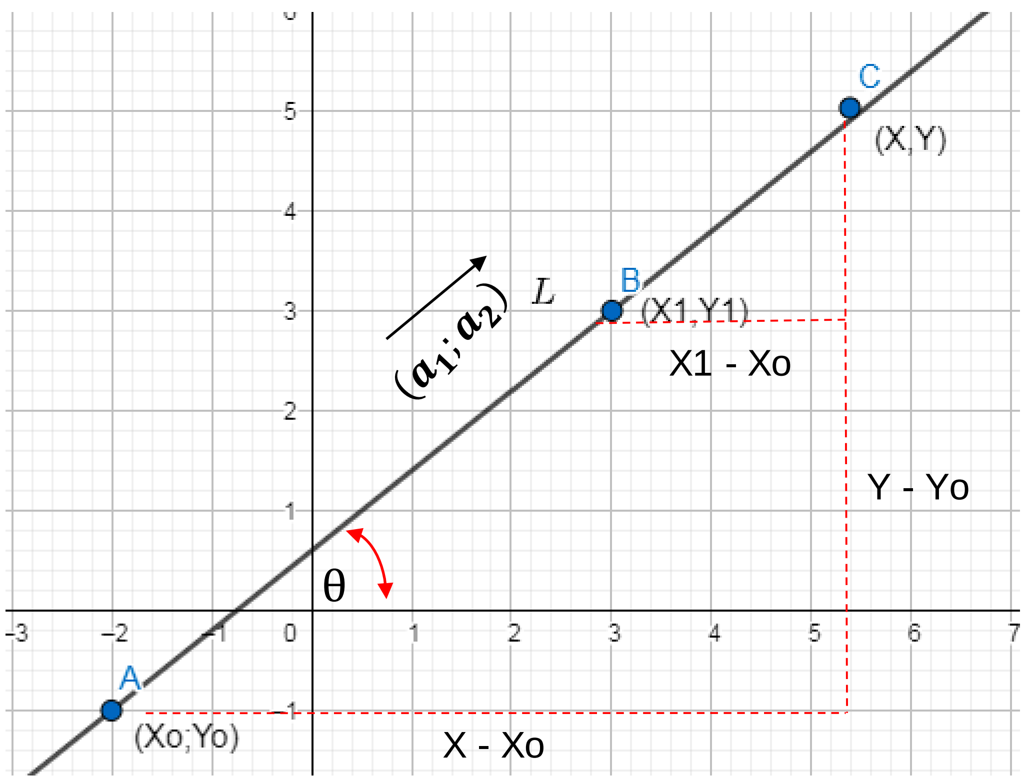
El módulo de vector proyección se conoce como la componente del vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

Denota: $Comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

La recta en R^2

- La recta en dos dimensiones (R^2).
- Ecuaciones de la recta. Formas
- Ángulo de inclinación y Pendiente de una recta.
- Distancia de un punto a una recta.
- Paralelismo y Ortogonalidad entre rectas. Intersección de rectas.

La recta en R^2



Ecuación vectorial

$$(X,Y) = (X_0,Y_0) + t\,\overrightarrow{AB}$$

Ecuación paramétrica

$$X = X_0, +t\,a_1$$
$$Y = Y_0, +t\,a_2$$

Ecuación dado dos puntos

$$\frac{Y - Y_o}{X - X_0} = \frac{Y_1 - Y_o}{X_1 - X_0}$$

Ecuación punto pendiente

$$Y - Y_o = m(X - X_0)$$

Ecuación intercepto Eje Y

$$Y = mX + b$$

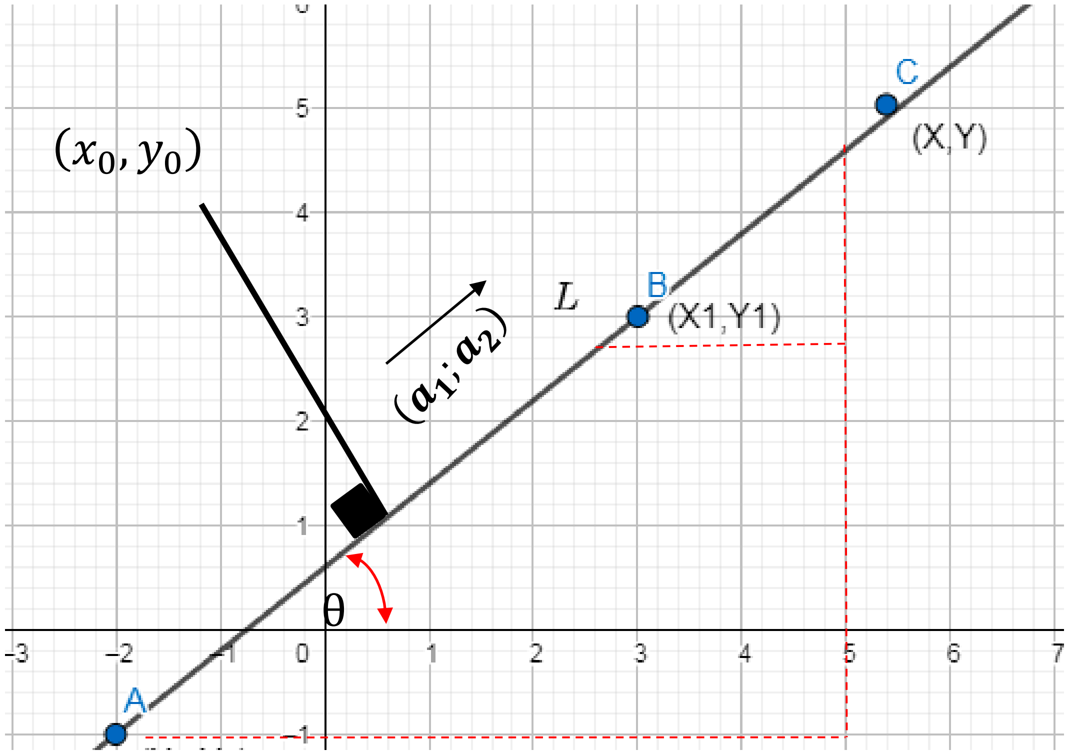
Ecuación General

$$AX + By + C = 0$$

Pendiente de una recta $m = \dfrac{Y_1 - Y_o}{X_1 - X_0} = \tan\theta$

Si conoce la ecuación general $m = -\dfrac{A}{B}$

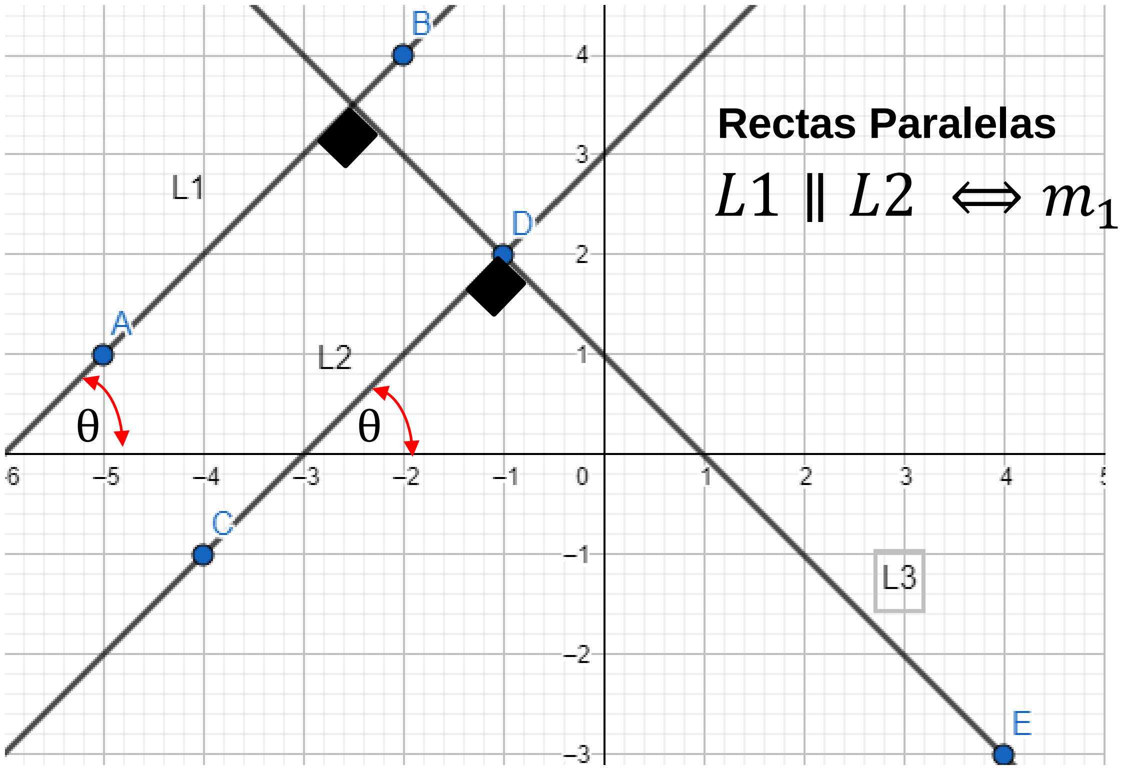
Distancia de un punto a una recta



Distancia de un punto a una recta

$$d(P,\vec{L}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Rectas paralelas y perpendiculares



Rectas Paralelas

$$L1 \parallel L2 \iff m_1 = m_2$$

Rectas Perpendiculares

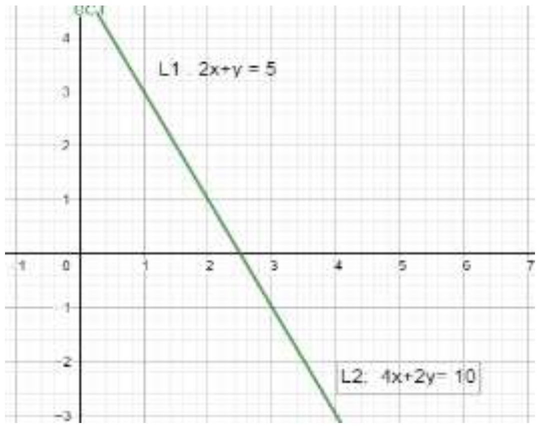
$$L1 \perp L3 \iff m_1 . m_2 = -1$$

Intersección entre rectas

Dadas dos rectas, $L1: \; Ax + By + C = 0$ $\quad L2: Dx + Ey + F = 0$

RECTAS COINCIDENTES

Si $\quad \dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{D}} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{F}}$

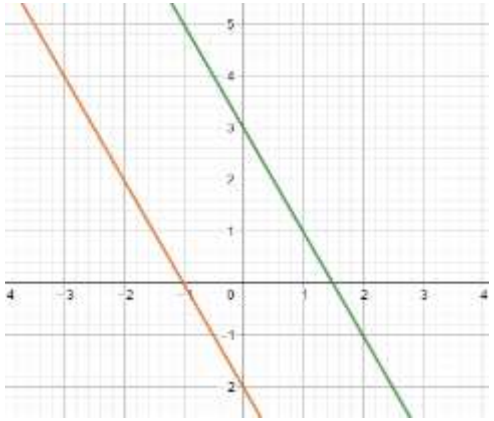


$L1: 3x + 5y - 2 = 0$

$L2: 6x + 10y - 4 = 0$

RECTAS PARALELAS

si: $\quad \dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{D}} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}'} \neq \dfrac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{F}}$

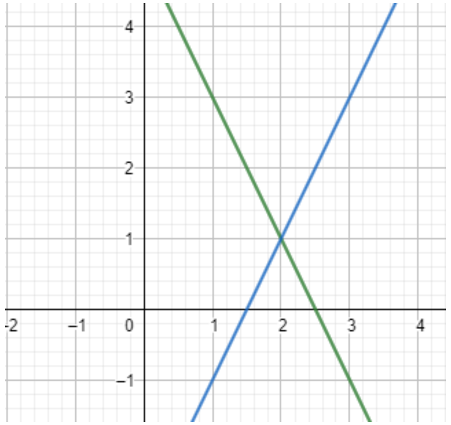


$L1: 2x + y - 5 = 0$

$L2: 2x + y + 3 = 0$

RECTAS SECANTES

Si : $\quad \dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{D}} \neq \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}}$



$L1: 2x + y - 5 = 0$

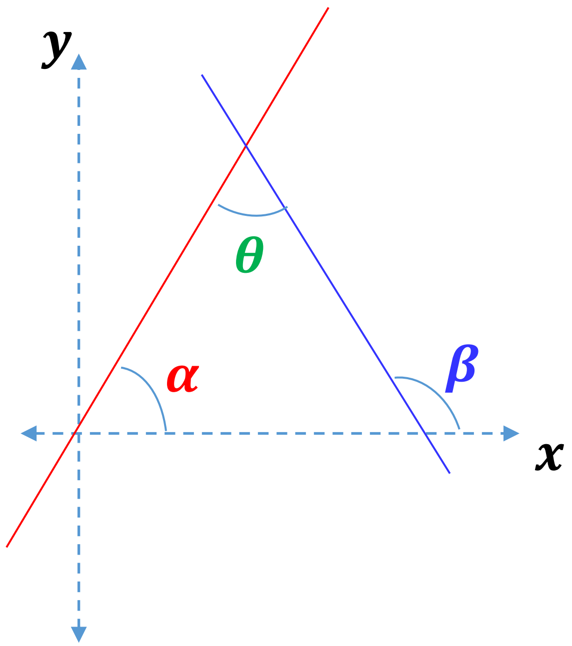
$L2: 2x - y - 3 = 0$

Solución (2,1)

Ángulo entre rectas entre rectas

Cada recta tiene su ángulo de inclinación (pendiente)

$$\begin{cases} Tag\alpha = m_1 \\ Tag\beta = m_2 \end{cases}$$



Por Trigonometría básica:

$$\beta = \alpha + \theta \;\Rightarrow \theta = \beta - \alpha$$

$$\mathrm{Tg}(\theta) = \mathrm{Tg}(\beta - \alpha)$$

$$\mathrm{Tg}(\theta) = \frac{Tg(\beta) - Tg(\alpha)}{1 + Tg(\beta)Tg(\alpha)}$$

$$\mathrm{Tg}(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$$

$$\theta = arcTg\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}\right)$$

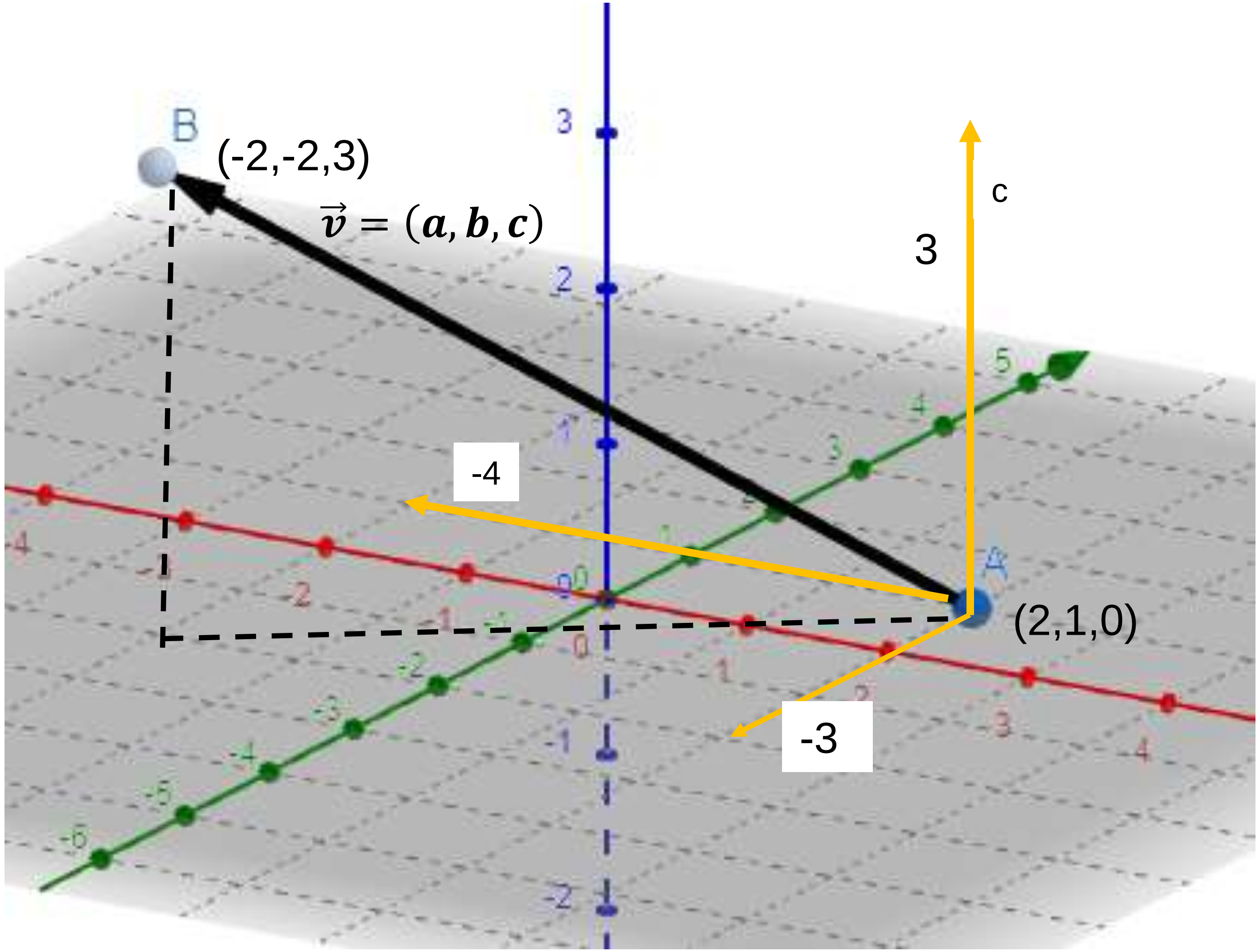
Vectores Rectas y Planos en R^2 y R^3

- Vectores en R^2
- La recta en R^2
- Vectores en R^3
- La recta en R^3
- El Plano

Vectores en R^3

- Espacio Vectorial en tres dimensiones (R3). Módulo del vector. Vector unitario. Vectores canónicos (i,j,k). Suma y Diferencia de vectores. Producto de un escalar por un vector.
- Paralelismo. Producto escalar, ángulo entre vectores.
- Proyección Ortogonal y Componente entre vectores.
- Producto vectorial. Triple Producto Escalar y Vectorial.
- Aplicaciones en áreas y volúmenes.

Vectores en R^3



Módulo de un vector en R^3

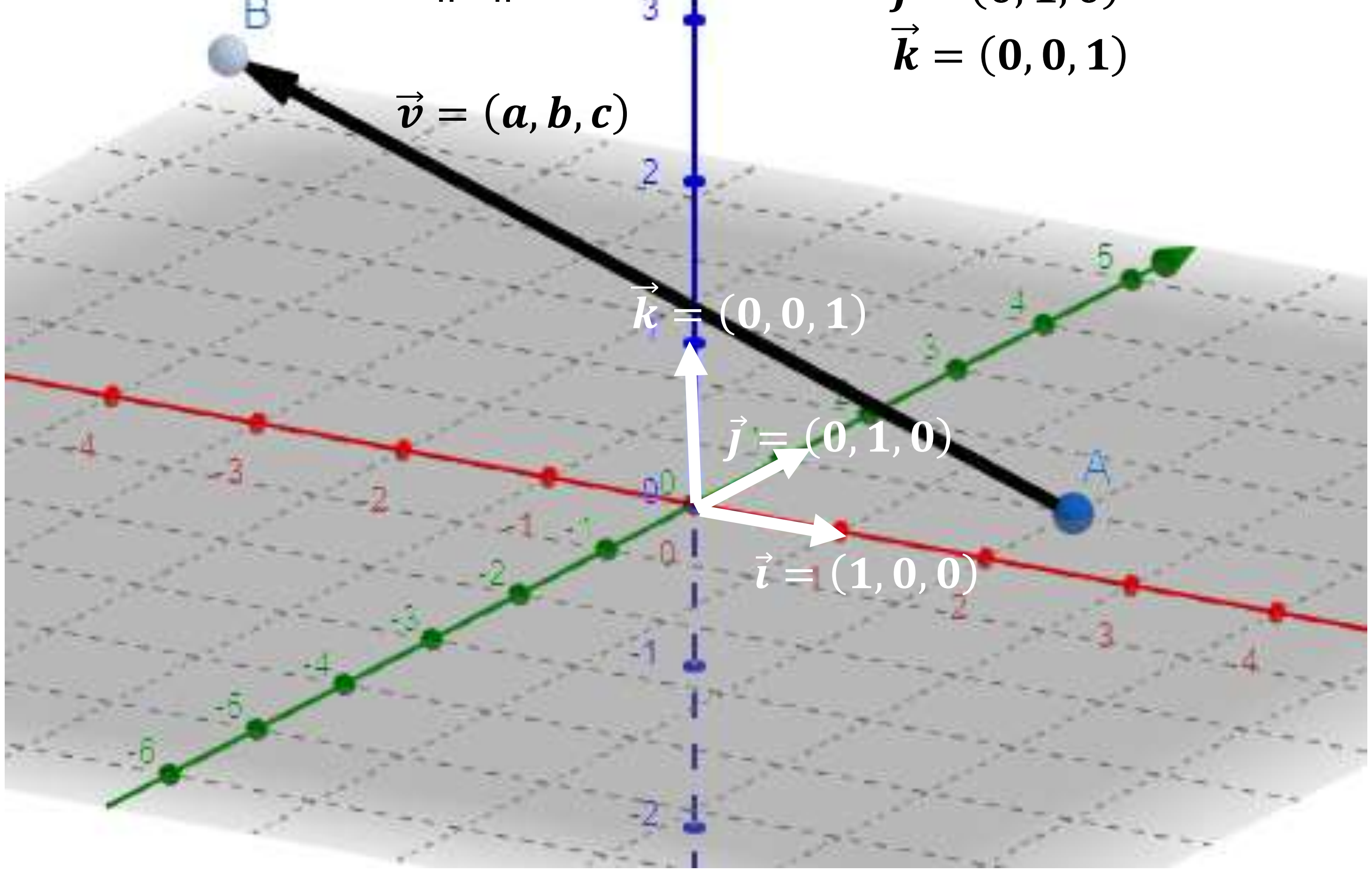
$\vec{v} = (a, b, c) \rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\vec{v} = (-4, -3, 3) \rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

Vector unitario – Vectores canónicos

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$



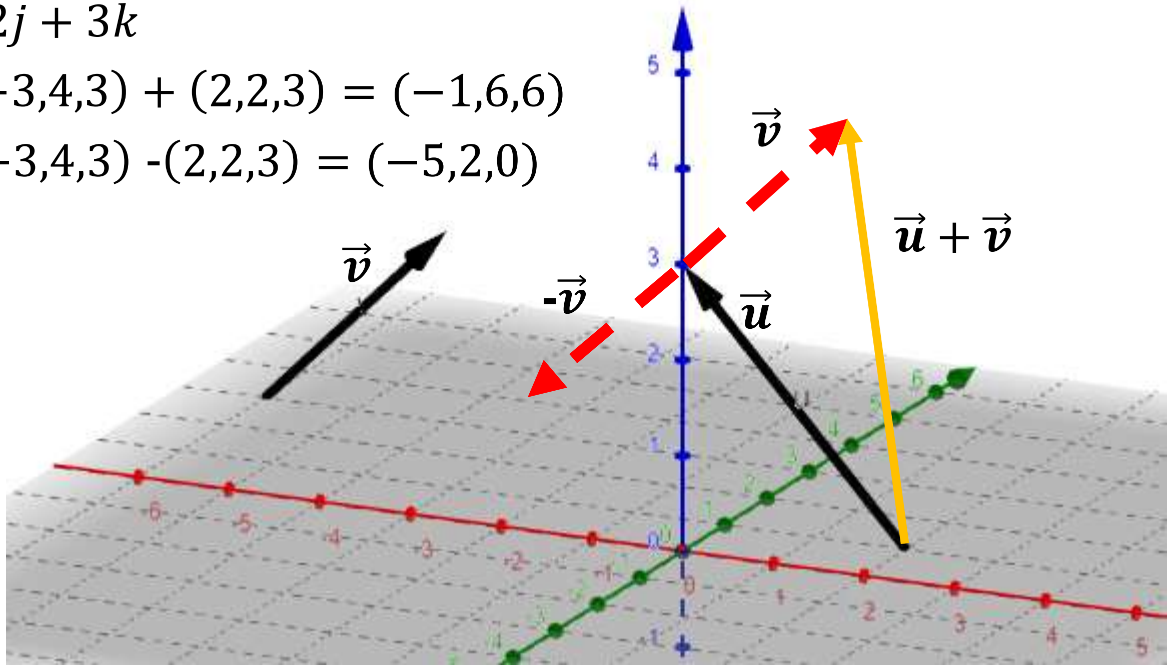
Suma y Diferencia de Vectores

$\vec{u} = (-3,4,3)$

$\vec{v} = 2i + 2j + 3k$

$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = (-3,4,3) + (2,2,3) = (-1,6,6)$

$\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = (-3,4,3)$ -$(2,2,3) = (-5,2,0)$



Multiplicación por un escalar

$\vec{u} = (-3,4,3)$

$\vec{v} = 2i + 2j + 3k$

Calcula $\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{u}} + \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{v}}$

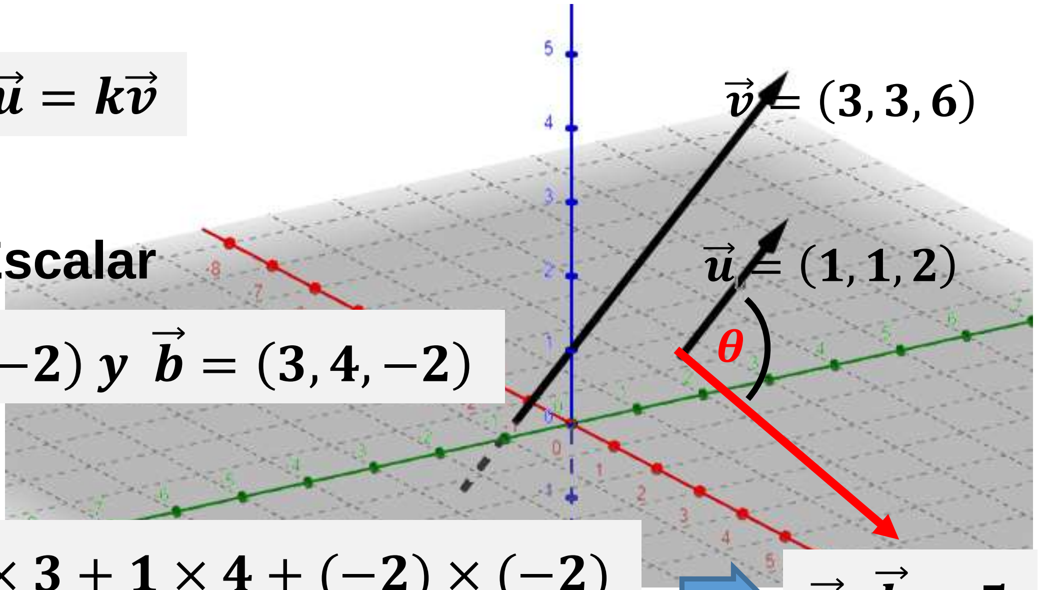
$\overrightarrow{\mathbf{3u}} + \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{v}} = 3(-3,4,3)$ $+5(2,2,3)$

$\overrightarrow{\mathbf{3u}} + \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{v}} = (-9,12,9)$ $+(10,10,15)$

$\overrightarrow{\mathbf{3u}} + \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{v}} = (1,22,24)$

Vectores Paralelos

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$$



Producto Escalar

$$\vec{a} = (-1,1,-2) \ y \ \vec{b} = (3,4,-2)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = -1 \times 3 + 1 \times 4 + (-2) \times (-2)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = 5$$

Ángulo entre vectores

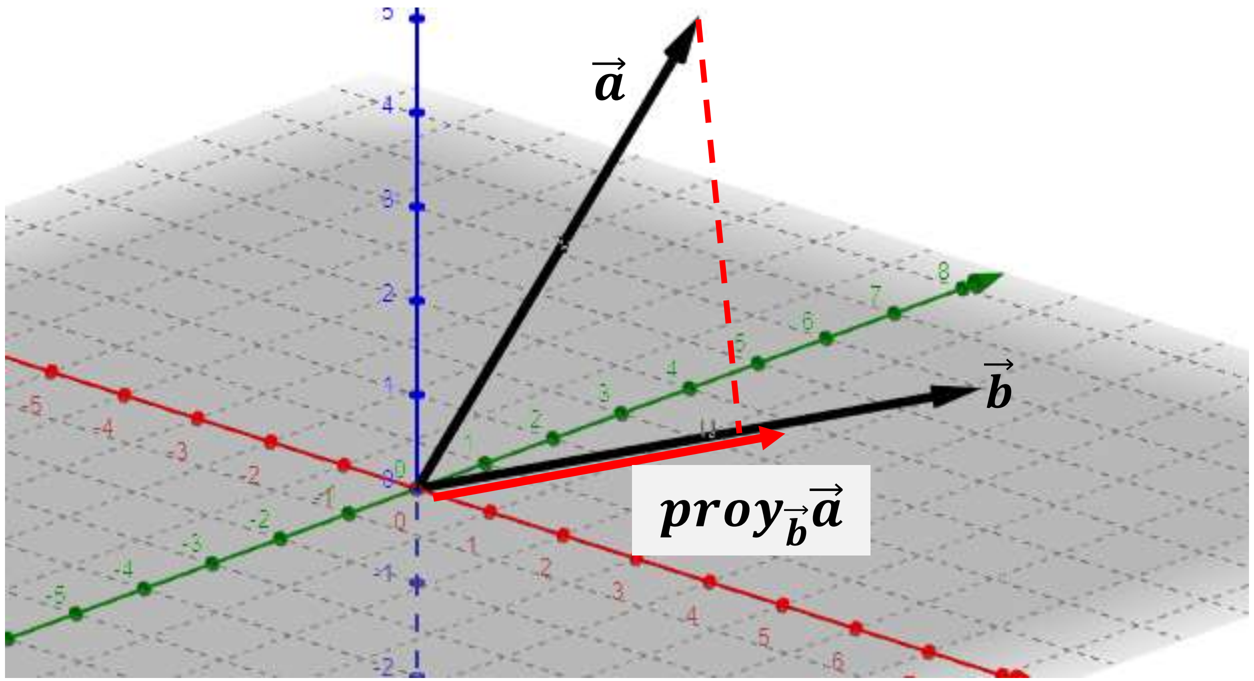
$$\bar{a}.\bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\| Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = arccos\left(\frac{\bar{a}.\bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}\right)$$

Si $\bar{a}.\bar{b} = 0 \Rightarrow \theta = 90^0$

Vectores Perpendiculares

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = 0$$

Proyección ortogonal y componente de un vector



$$proy_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b}$$

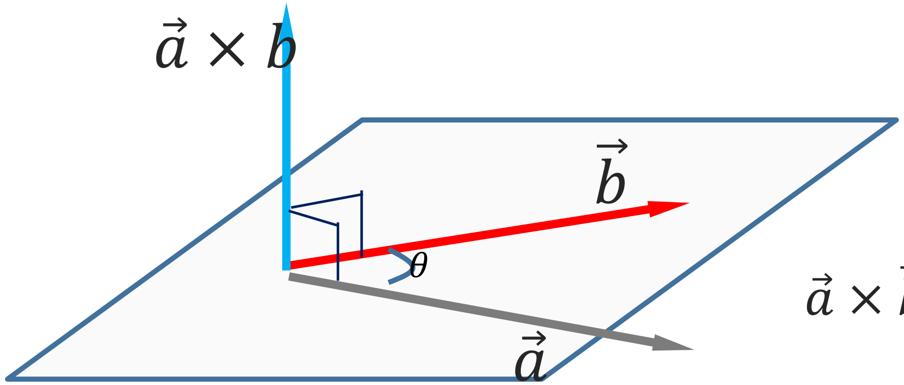
$$Comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Producto vectorial

El producto vectorial $(\vec{a} \times \vec{b})$se caracteriza por:

Módulo: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen} \theta$

Dirección: perpendicular a ambos: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{\imath} - (-4)\vec{\jmath} + -3\vec{k}$$

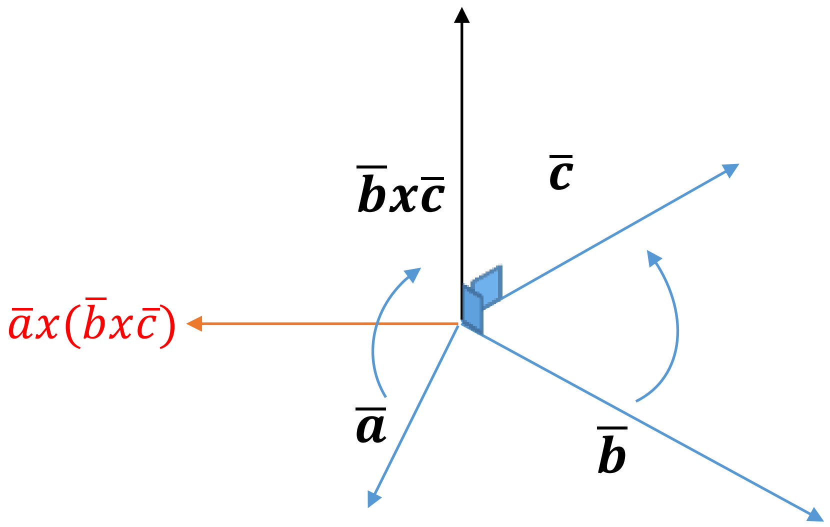
$$\vec{a} \times \vec{b} = (1,4,-3)$$

Triple producto escalar

$$[\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) \Rightarrow \quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

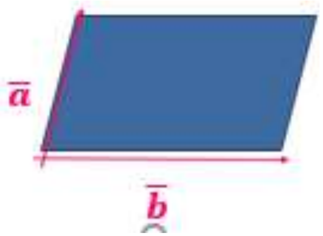
Triple Producto Vectorial

$$\bar{a}x(\bar{b}x\bar{c}) = \bar{b}.(\bar{a}.\bar{c}) - \bar{c}.(\bar{a}.\bar{b})$$



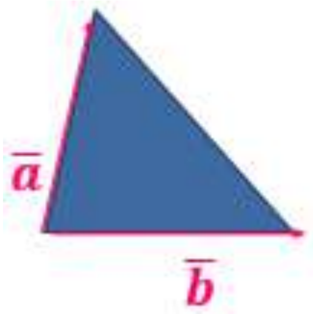
Aplicaciones : Área y Volumen

Área del Paralelogramo



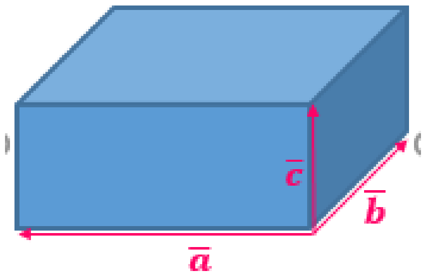
$$A_P = \left\|\vec{a} x \vec{b}\right\|$$

Área del triángulo



$$A_T = \frac{\left\|\vec{a} x \vec{b}\right\|}{2}$$

Volumen del paralelepípedo



$$\boldsymbol{V_P = [\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}]}$$

Volumen del prisma recto

$$\boldsymbol{V_{PR} = \frac{[\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}]}{2}}$$

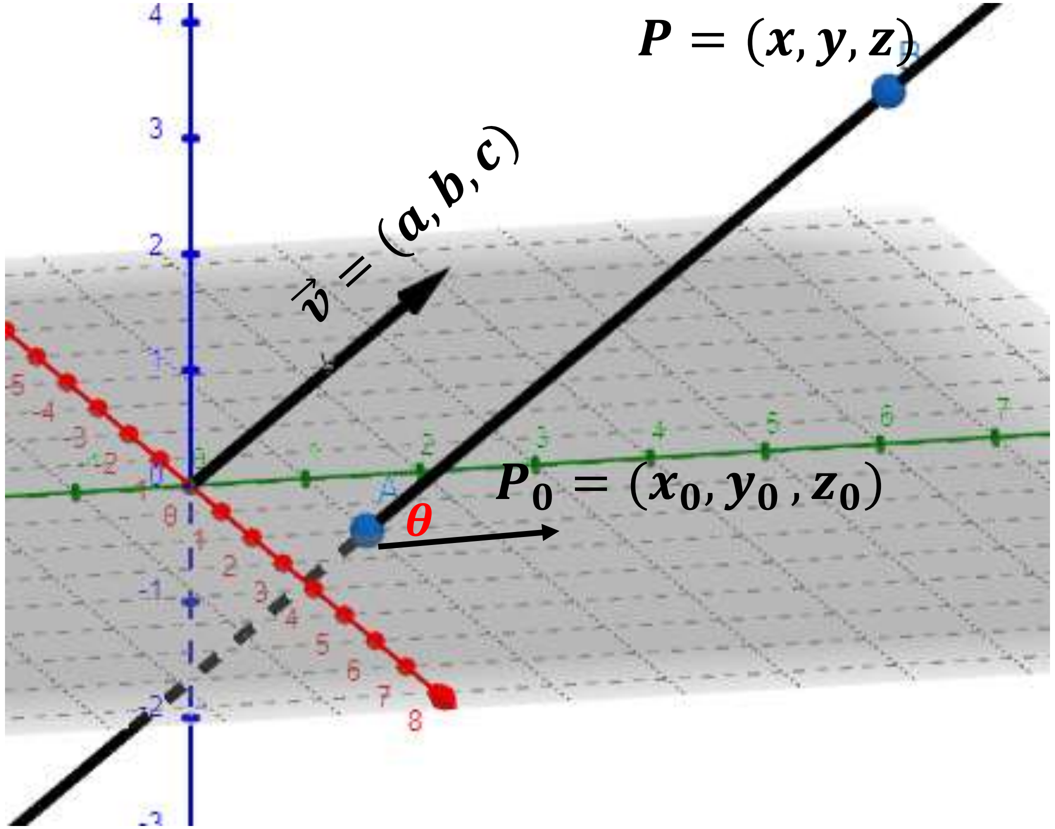
Volumen del Tetraedro

$$\boldsymbol{V_T = \frac{[\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}]}{6}}$$

La recta en R^3

- La recta en tres dimensiones (R^3).
- Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica.
- Paralelismo y Ortogonalidad entre rectas. Ángulo entre rectas. Intersección de rectas.
- Distancia entre rectas que se cruzan.

La recta en R^3



Ecuación vectorial de L

$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(a; b; c)$

Ecuación simétrica

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ecuación paramétrica:

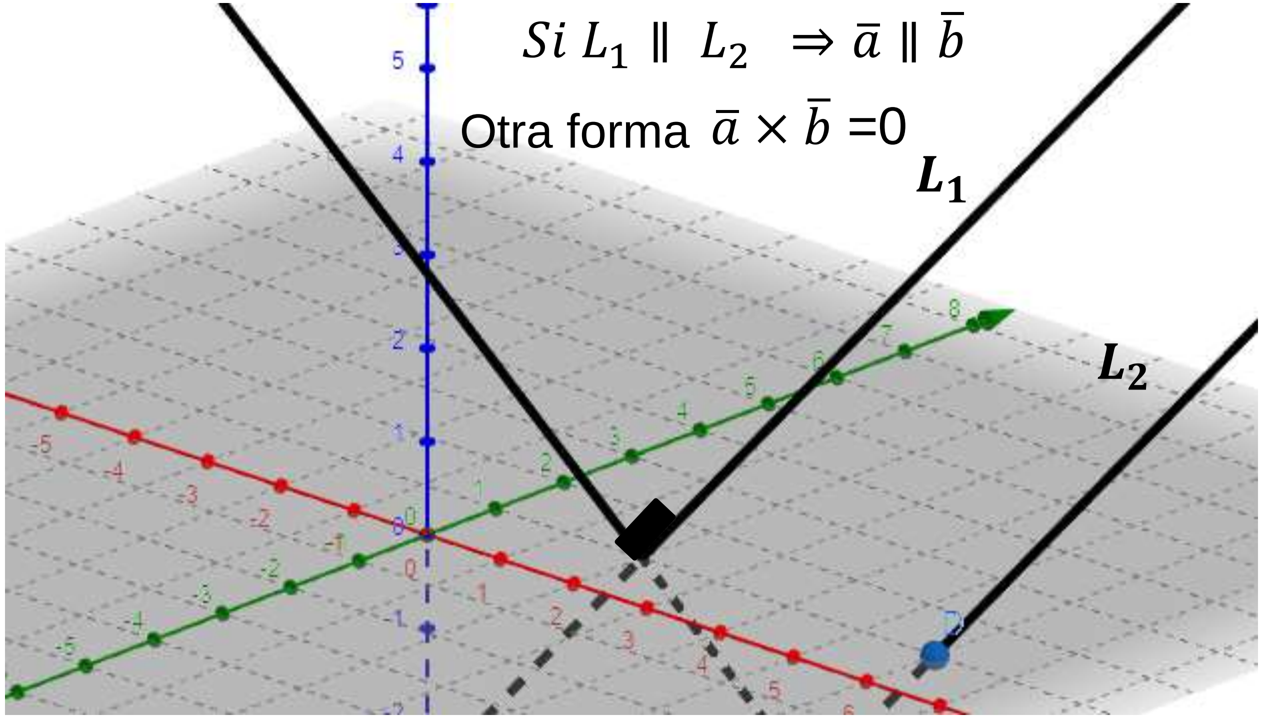
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in R \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Paralelismo entre rectas

Dadas las rectas $l_1: (x, y, z) = P_0 + t\vec{a}$ y $l_2: (x, y, z) = Q_0 + r\vec{b}$

$$Si\ L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$

Otra forma $\bar{a} \times \bar{b}$ =0



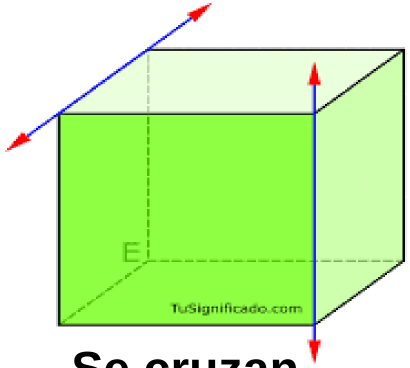
Rectas perpendiculares

Dadas las rectas $l_1: (x, y, z) = P_0 + t\vec{a}$ y $l_3: (x, y, z) = R_0 + s\vec{b}$

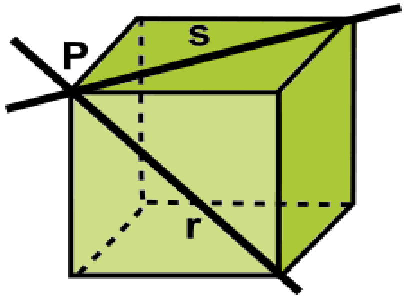
$$Si\ L_1 \perp L_2 \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = 0$$

Ángulo entre rectas $\boldsymbol{Cos\theta} = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{\|\bar{\boldsymbol{a}}\|\|\bar{\boldsymbol{b}}\|}$

Posiciones entre rectas no paralelas



Se cruzan



Se cortan

Dadas las rectas en el espacio

$$\boldsymbol{l_1}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{a}} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{l_2}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{Q_0} + \boldsymbol{r}\vec{\boldsymbol{b}}$$

Se forma $\begin{bmatrix} Q_0 - P_0 \\ \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$

Distancia entre rectas que se cruzan

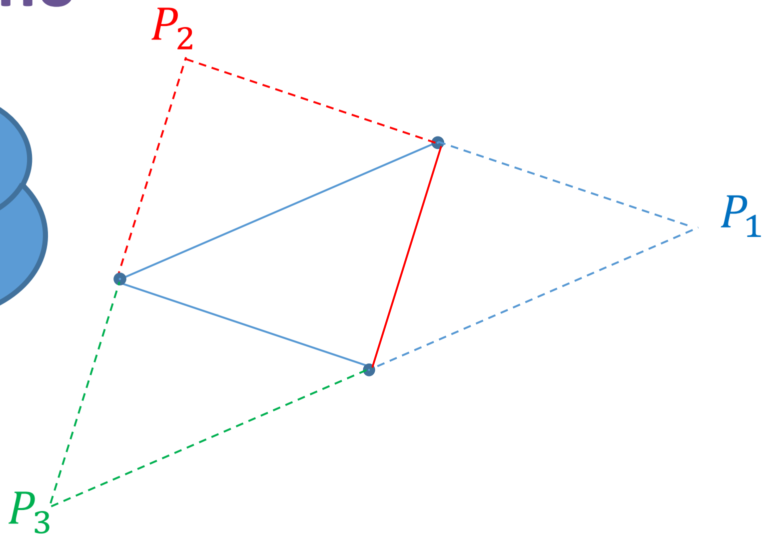
$$\boxed{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{L_2}) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\boldsymbol{P_0Q_0}}, \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\right]\right|}{\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right|}}$$

La ecuación del plano

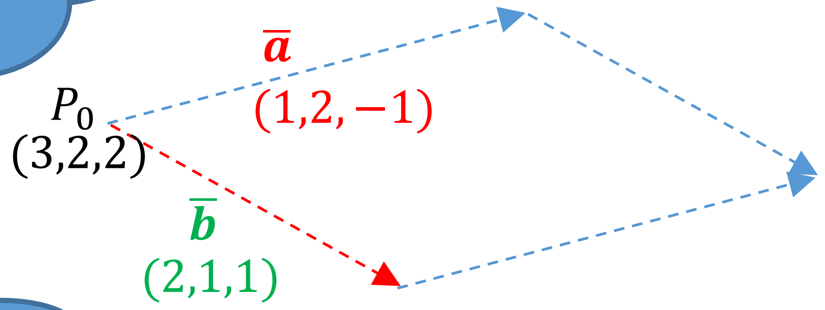
- Ecuación Vectorial, Normal y General.
- Paralelismo y Perpendicularidad.
- Ángulo diedro entre planos.
- Intersección de Planos.

Generación de un plano

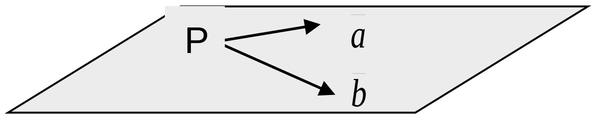
Geométricamente 3 puntos no colineales determinan un Plano



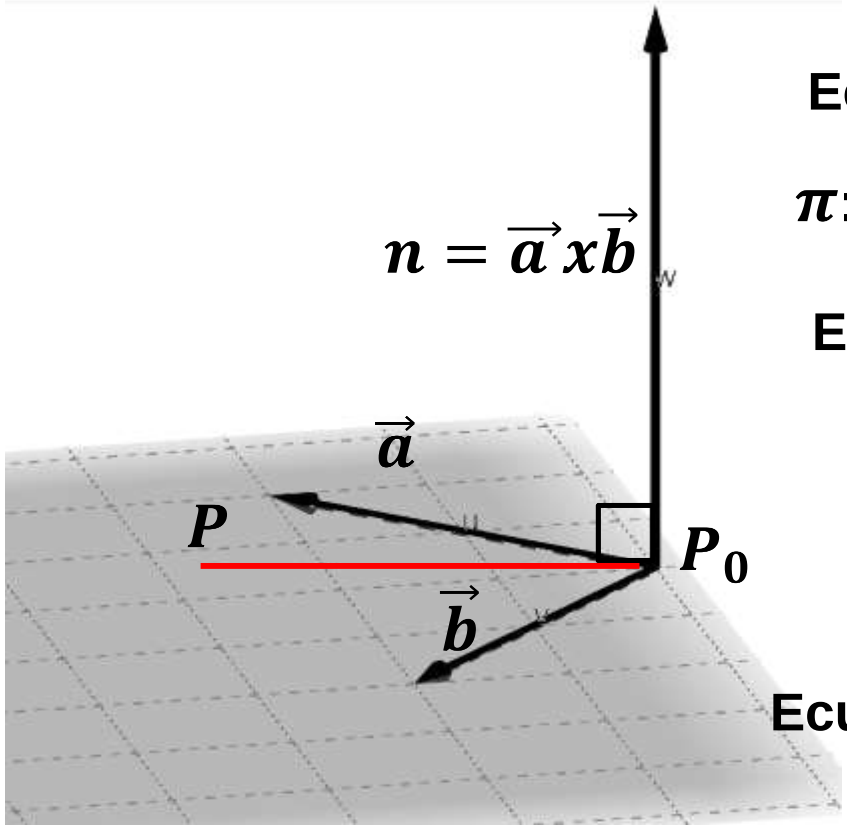
Vectorialmente 2 vectores no paralelos determinan un Plano



$$\overline{\boldsymbol{a}}x\overline{\boldsymbol{b}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{a}} \nparallel \overline{\boldsymbol{b}}$$



Ecuación vectorial normal y general de un plano



Ecuación Vectorial

$$\pi: P + t\vec{a} + s\vec{b}\ ; t, s \in R$$

Ecuación Normal

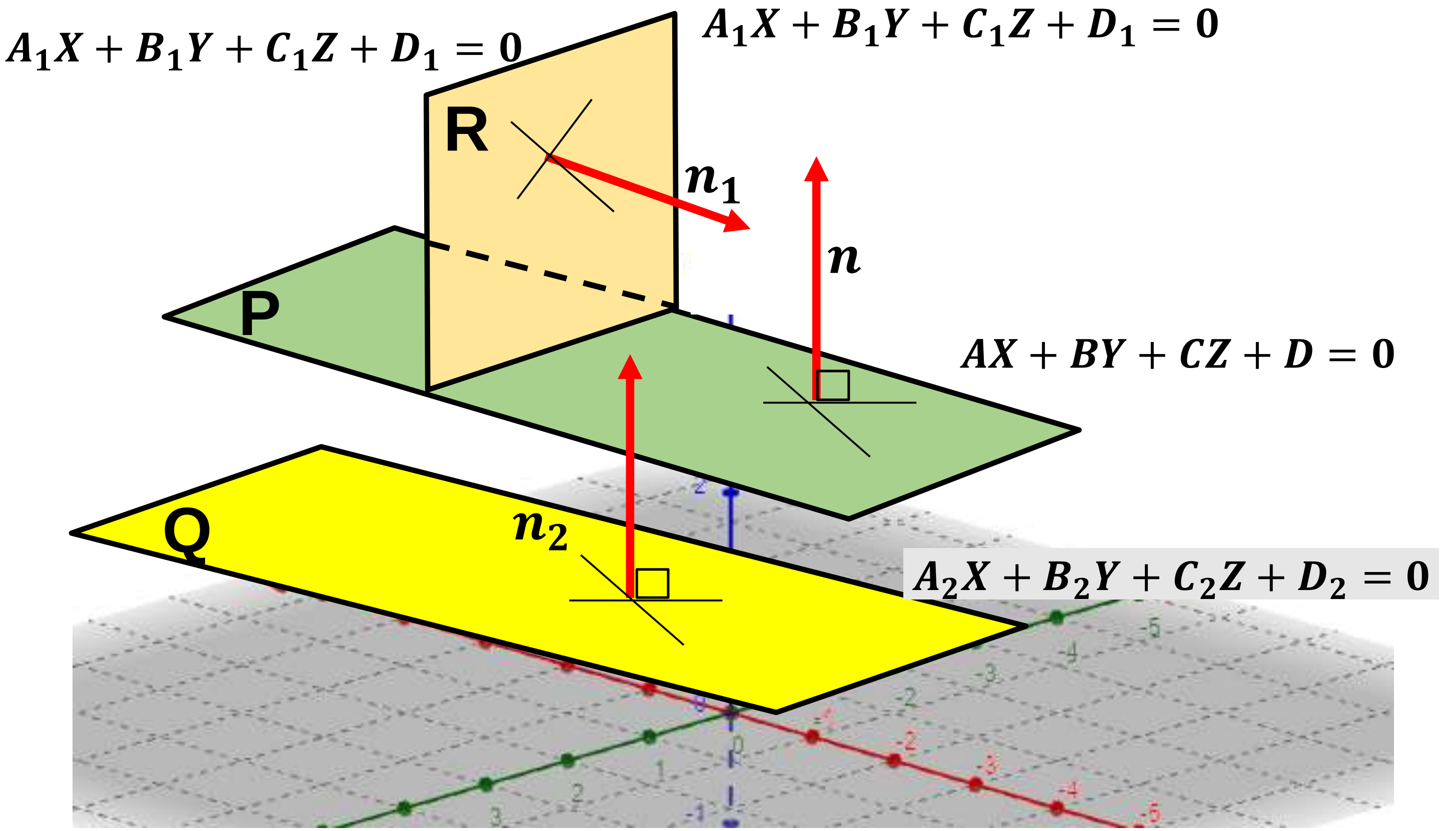
$$(\mathrm{P} - P_0).\vec{n} = 0$$

donde $\vec{n} = (A, B, C)$

Ecuación General

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

Planos paralelos y perpendiculares



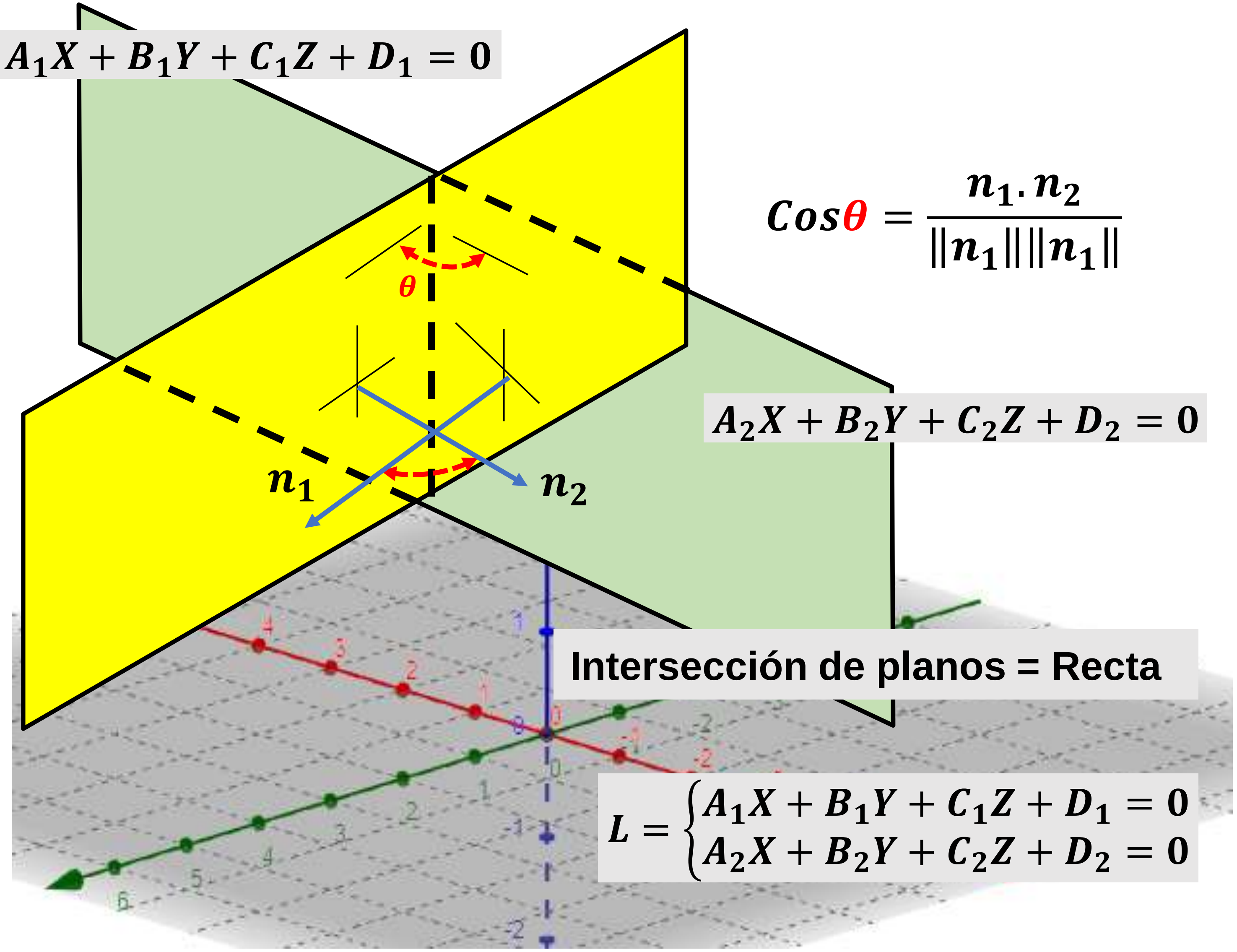
Paralelismo $P \parallel Q \Longrightarrow \; n \parallel n_2$ o $n \times n_2 = 0$

Perpendicularidad $P \perp R \Longrightarrow \; n \perp n_1$ o $n . n_1 = 0$

Distancia de un punto a un plano

$$d(M, \Delta P) = \frac{|AX_0 + BY_0 + C_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ángulo diedro entre planos



$$Cos\theta = \frac{n_1 . n_2}{\|n_1\|\|n_1\|}$$

$$L = \begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Conclusiones

- Las operaciones entre vectores permiten calcular la resultante en un sistema de fuerzas y su dirección y podemos ampliar hacia temas como la electricidad, magnetismo.

- El producto escalar y vectorial se aplica en el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y superficies no regulares.

- Para determinar la ecuación de un plano es necesario utilizar el producto escalar y vectorial de vectores lo que indica la conexión entre vectores, rectas y planos que son temas previos al calculo vectorial donde se interactúa con derivadas e integrales.

Gracias

Docente: Jaime A. Fernández Caycho