VECTORES

PARALELOS Y PERPENDICULARES

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el alumno reconoce vectores paralelos y perpendiculares. Aplica e interpreta el concepto del operador *"ortogonal del vector" y* del producto escalar para reconocer la Perpendicularidad.

Universidad Tecnológica del Perú

Universidad Tecnológica del Perú

VECTORES

- VECTOR PARALELO
- VECTOR ORTOGONAL

Universidad Tecnológica del Perú

PARALELISMO DE VECTORES

Dos vectores Paralelos se representan como: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = k.\vec{b}$$ **(k es un escalar)**

Si un escalar multiplicado por un vector $\vec{a}$ da el vector $\vec{b}$ entonces ambos vectores son paralelos.

El concepto del módulo de un vector y el reconocimiento del paralelismo genera un teorema de gran aplicación para la física.

$$Teorema:\ \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entonces sus vectores unitarios son iguales.

¿ *son paralelos* $\vec{a} = (2, -3);\ \vec{b} = (4, -6)$?

$$\vec{b} = k.\vec{a} \quad \Rightarrow (4, -6) = k.(2, -3)$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Observe que el Teorema se cumple

$$\vec{a} = \frac{(2,-3)}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\vec{b} = \frac{(4,-6)}{\|\vec{b}\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{-6}{\sqrt{52}}\right) = \left(\frac{4}{2\sqrt{13}}, \frac{-6}{2\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

EJERCICIOS

Dados los vectores $\vec{m} = (-1,2) y\, \vec{n} = (3,6)$ ¿son paralelos? ¿Se cumple el Teorema?

solución Probando el Paralelismo: $(-1,2) = k.(3,-6)$

Sí, $k = -\frac{1}{3}$, son iguales por lo tanto son paralelos

Convirtiéndolos a unitarios:

$$\vec{m} = \frac{(-1,2)}{\|\vec{m}\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{(3-,6)}{\|\vec{n}\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{-6}{\sqrt{45}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

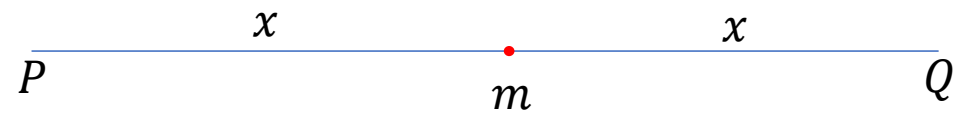
No son iguales por lo tanto el Teorema no se cumple

Si queremos aplicar el Teorema debemos tener cuidado al tomar los vectores en un mismo sentido

EJERCICIO APLICATIVO

Se tiene un segmento $\overline{PQ}$ *con extremos* $P = (3,7)$ *y* $Q = (15,11)$; si, se quiere dividir en dos partes iguales. Halle las coordenadas del punto medio.

Solución:



El mismo sentido

$\overline{PQ} \parallel \overline{Pm}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} = \dfrac{\overline{Pm}}{|\overline{Pm}|}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{Q-P}{2x} = \dfrac{m-P}{x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(12,4)}{2} = \dfrac{m-(3,7)}{1}$

$\Rightarrow$ $(6,2) = m - (3,7)$ $\Rightarrow$ $(6,2) + (3,7) = m$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{(9,9) = m}$

¿Si sumamos los extremos y lo dividimos entre dos?

$$\frac{P+Q}{2} \Rightarrow \frac{(18,18)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{(9,9) = m}$$

Producto escalar o interno de vectores

Dados dos vectores $\vec{u} = (a, b)$ *y* $\vec{v} = (c, d)$, el producto escalar o Interno de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define así:

$$\vec{u}.\vec{v} = (a, b).(\vec{c}, d) = a.c + b.d$$

Ejemplo: Dados los vectores: $\vec{u} = (4,3)$ **y** $\vec{v} = (-2,7)$**. Calcula** $\vec{u}.\vec{v}$

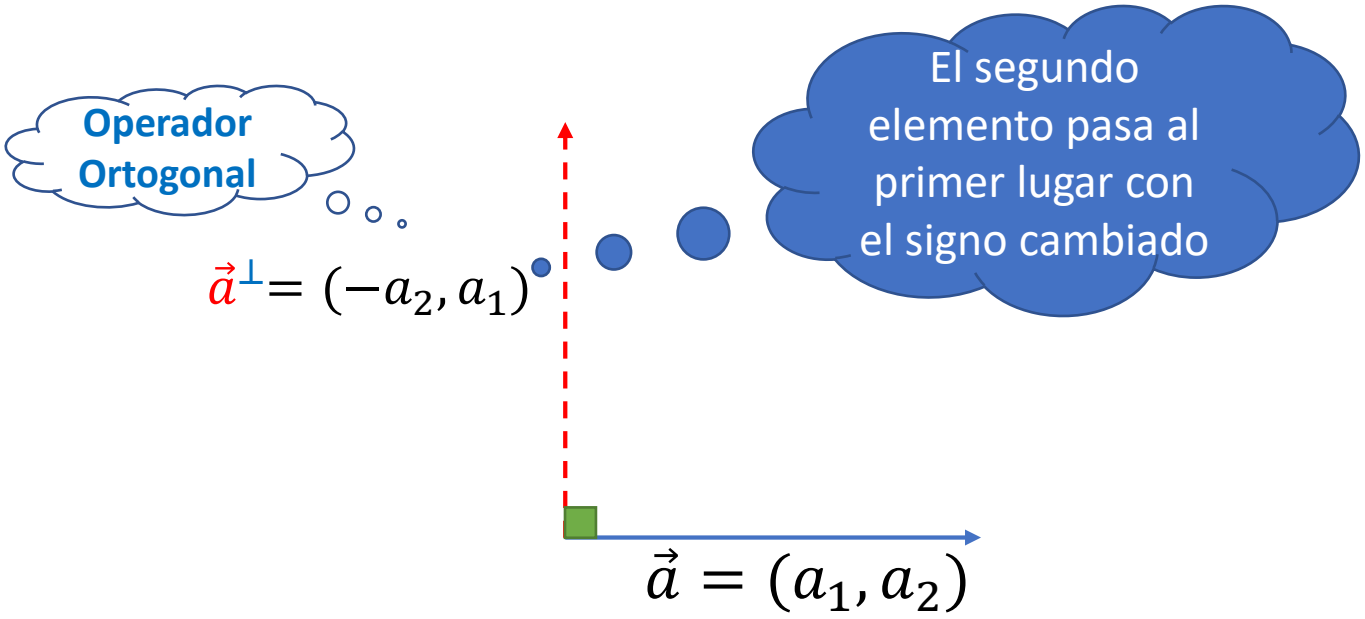
$$\vec{u}.\vec{v} = (4, 3).(-2, 7) = (4)(-2)+(3)(7) = 13$$

$\therefore \vec{u}.\vec{v}$=13

Notamos que, el producto interno o escalar de los vectores es un número

OPERADOR ORTOGONAL

El operador ortogonal tiene la función de hacer girar al vector 90^0 *en sentido antihorario*.



$Sea\ \vec{b} = (2,6)$ entonces $\vec{b}^{\perp} = (-6,2)$

VECTORES PERPENDICULARES

Definición:

$Dos\ vectores\ \vec{u}\ \ y\ \ \vec{v}$, son perpendiculares si y solo si $\vec{u}\ .\ \vec{v} = 0$

$$Si:\ \vec{u} \perp \vec{v} \ \leftrightarrow\ \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Decir Perpendiculares implica a decir que entre ellos el ángulo es de 90°.

Propiedades

1. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

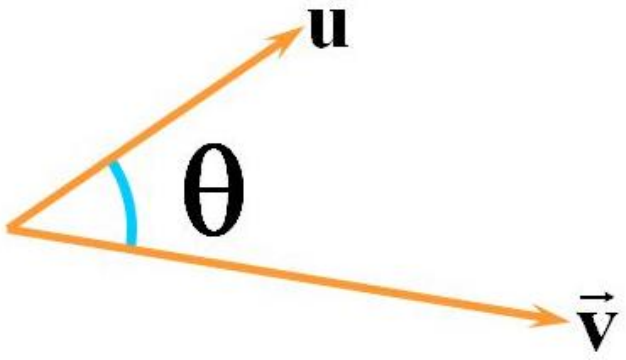
2. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

3. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

4. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos que tienen el mismo origen, sea θ el menor de los ángulos positivos formado por dichos vectores que satisfacen:



$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\boldsymbol{Cos\,\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

Si $\vec{u}.\vec{v}$= 0 , entonces el ángulo será de 90°

Ejemplo para practicar: Halle el ángulo entre los vectores a= (3; 4) y b= (4; 3).

Rpta: θ = arc cos $\frac{24}{25}$

Ejemplo:

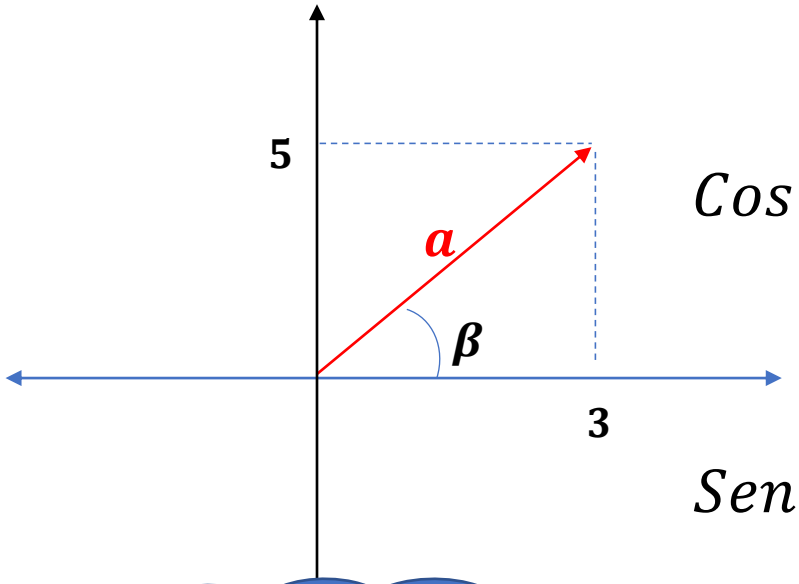
Sean $\vec{a} = (4, -3)$ y $\vec{b} = (24,7)$; determine el ángulo que forman

Resolución:

$$Cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|} = \frac{75}{5.25} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \theta = arcCos\left(\frac{3}{5}\right) = 53,1^{0}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR



$$Cos\,\beta = \frac{3}{\|a\|} \Rightarrow \|a\|\text{Cos}\beta = 3$$

$$Sen\,\beta = \frac{5}{\|a\|} \Rightarrow \|a\|\text{Sen}\beta = 5$$

El vector en función de su ángulo de inclinación

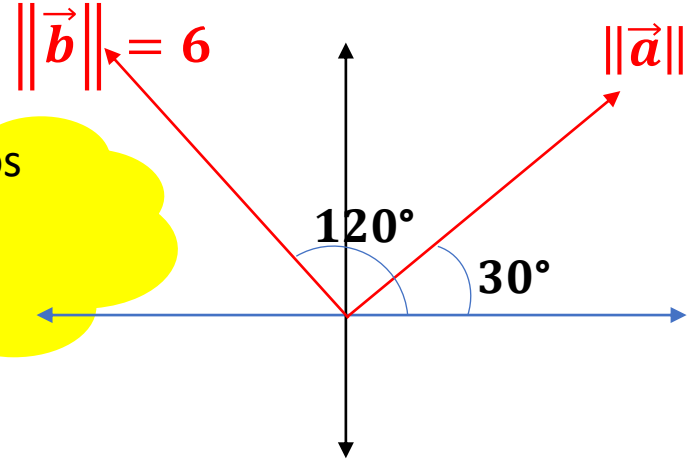
$$a = \|(3,5)\|(Cos\beta, Sen\beta)$$

Si el vector fuera unitario su módulo sería 1

$$\Rightarrow \begin{matrix} \text{Cos}\beta = 3 \\ \text{Sen}\beta = 5 \end{matrix}$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN

Dados los vectores en el gráfico. Halle la resultante del sistema



Sólo se tienen los módulos y los ángulos de inclinación

En Física las Fuerzas se representan por vectores

La Resultante es la suma de los vectores $\vec{a} + \vec{b}$

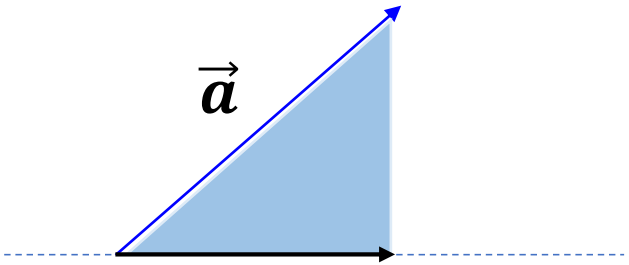
Como los vectores no son unitarios:

$$\vec{a} = \|\vec{a}\|(Cos30°, Sen30°) \Rightarrow \vec{a} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2\sqrt{3}, 2)$$

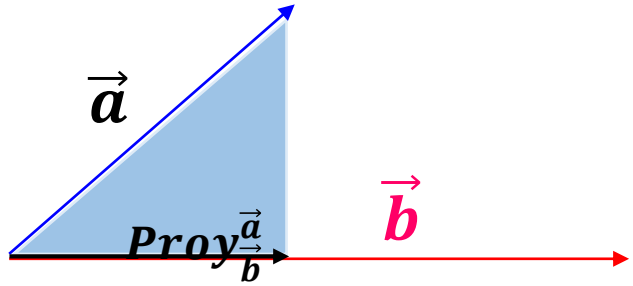
$$\vec{b} = \|\vec{b}\|(Cos120°, Sen120°) \Rightarrow \vec{b} = 6\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-3, 3\sqrt{3})$$

$$Resultante = (2\sqrt{3}, 2) + (-3, 3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3, 2 + 3\sqrt{3})$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR



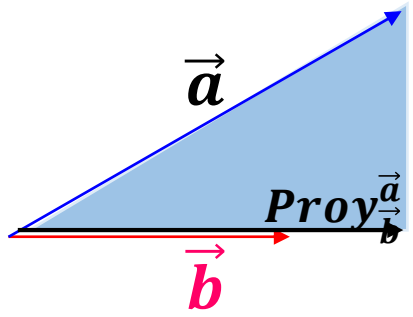
La sombra que proyecta el vector $\vec{a}$ le decimos proyección



La sombra que proyecta el vector $\vec{a}$ sobre $\bar{b}$, le decimos proyección ortogonal

Denota: $Proy_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}.\vec{b}$

COMPONENTE ORTOGONAL DE UN VECTOR



La sombra que proyecta el vector $\vec{a}$ sobre $\bar{b}$, le decimos proyección ortogonal, LA MEDIDA DE ESTE VECTOR SE CONOCE COMO LA COMPONENTE DEL VECTOR $\vec{a}$ SOBRE $\vec{b}$

Denota: $Comp_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|}$

PROPIEDADES

1. – $Proy_{\vec{b}}^{k.\vec{a}} = k.Proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

2. – $Proy_{k.\vec{b}}^{\vec{a}} = Proy_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

3. – $Comp_{\vec{b}}^{k.\vec{a}} = k.Comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

4. – $Comp_{k.\vec{b}}^{\vec{a}} = Comp_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

Universidad Tecnológica del Perú

Ejemplo:

Sean $\vec{a} = (4, -3)$ y $\vec{b} = (24,7)$; determine el vector $Proy_{\vec{b}}\vec{a}$ y $Comp_{\vec{b}}\vec{a}$

Resolución:

- $Proy_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.\vec{b} = \frac{75}{625}.(24,7) = \left(\frac{72}{25}, \frac{21}{25}\right)$
- $Comp_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{75}{25} = 3$

Ejemplo

- Si: $\vec{a} = (-3, -4)$; $\vec{b} = (4,3)$; $\vec{c} = (-2,6)$. Halle:
- $Comp_{\vec{a}}^{\vec{b}}$
- $Proy_{\vec{c}}^{\vec{a}}$

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Reconoce cuándo los vectores son paralelos y perpendiculares.
2. El operador ortogonal hace que el vector gire en forma antihoraria 90°
3. El producto escalar me da como resultado un escalar y no un punto.

Excelente tu participación

No hay nada como un reto para sacar lo mejor de nosotros.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión.
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

1. Sean los vectores $\vec{a} = (-2,4)$; $\vec{b} = (3,5)$; $\vec{c} = (3,-6)$. Determinar el valor de:

$$(\vec{b} + 2i)(3i - \vec{a}^{\perp}) + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

SOLUCIÓN:

$$(\vec{b} + 2i)(3i - \vec{a}^{\perp}) + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$= \big((3,5) + 2(1,0)\big)\big(3(1,0) - (-4,-2)\big) + (3,5) \cdot (3,-6)$$

$$= \big((3,5) + (2,0)\big)\big((3,0) - (-4,-2)\big) + (9 - 30)$$

$$= (5,5)(7,2) - 21$$

$$= (35 + 10) - 21$$

RPTA: $= 24$

$b + 2i$ significa que solo le sumo 2 a la coordenada x del vector b

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Si $\vec{a} = (4m, m-3)$ y $\vec{b} = (2, m+3)$ determine los valores de m tales que $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$.

SOLUCIÓN:

Ésta vez usaremos coordenadas proporcionales ¡Observa!

$$\frac{4m}{2} = \frac{m-3}{m+3}$$

$$4m(m+3) = 2(m-3)$$

$$4m^2 + 12m = 2m - 6$$

$$4m^2 + 10m + 6 = 0$$

$$2m^2 + 5m + 3 = 0$$

$$(m+1)(2m+3) = 0$$

RPTA: $m = -1 \;;\; m = -\frac{3}{2}$

EJERCICIO RETO

Sean los vectores $\vec{a} = 6j - i$; $\vec{b} = 2i + 3j$; $\vec{c} = -5i$.
Hallar:

$$\left(2\vec{a} \cdot \vec{c}^{\perp} - \vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

RPTA: -50

Universidad Tecnológica del Perú

UTP
Universidad
Tecnológica
del Perú