INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA

VECTORES EN R^2

DEFINICIÓN Y OPERACIONES

Universidad Tecnológica del Perú

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce al Plano Cartesiano como un Plano Vectorial y a los elementos llamados pares ordenados como vectores; realiza operaciones entre vectores.

UTP Universidad Tecnológica del Perú

UTP Universidad Tecnológica del Perú

VECTORES

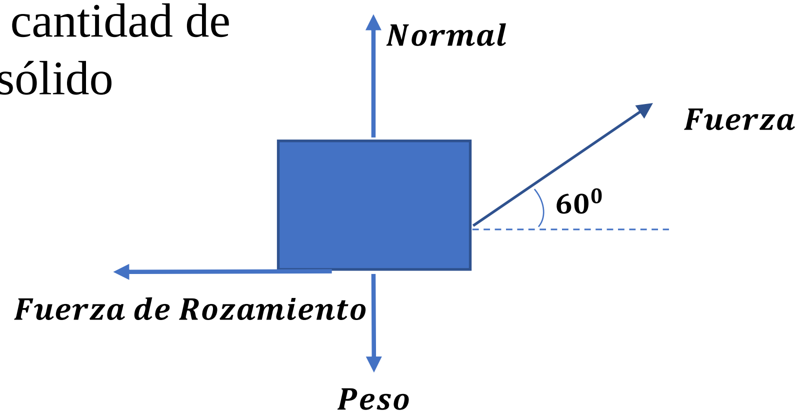
DEFINICIÓN

OPERACIONES

DEFINICIÓN DE VECTOR

Un vector es un segmento de recta, que con dirección y sentido representa una magnitud.

¿Como podemos observar la cantidad de fuerzas que actúan sobre un sólido cuando lo jalamos?



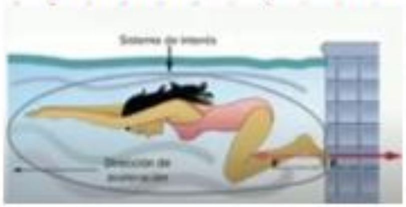
En física, cuando se tiene un vector, hay que tener en cuenta dos cantidades: su dirección y su magnitud. Las cantidades que sólo tienen una magnitud se llaman escalares. Si se da a una magnitud escalar una dirección, se crea un vector.

¿Para qué me sirven?

Universidad Tecnológica del Perú

Sirve para determinar, representar y calcular las magnitudes vectoriales.
Se encuentran en el estudio del álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, análisis matemático, calculo, etc.

En la vida cotidiana representan nuestros movimientos porque tienen Magnitud, dirección y sentido



Los vectores permiten representar fuerzas contrapuestas gracias a que señalan la dirección

En la Programación e informática pueden ser empleados como contenedores de datos

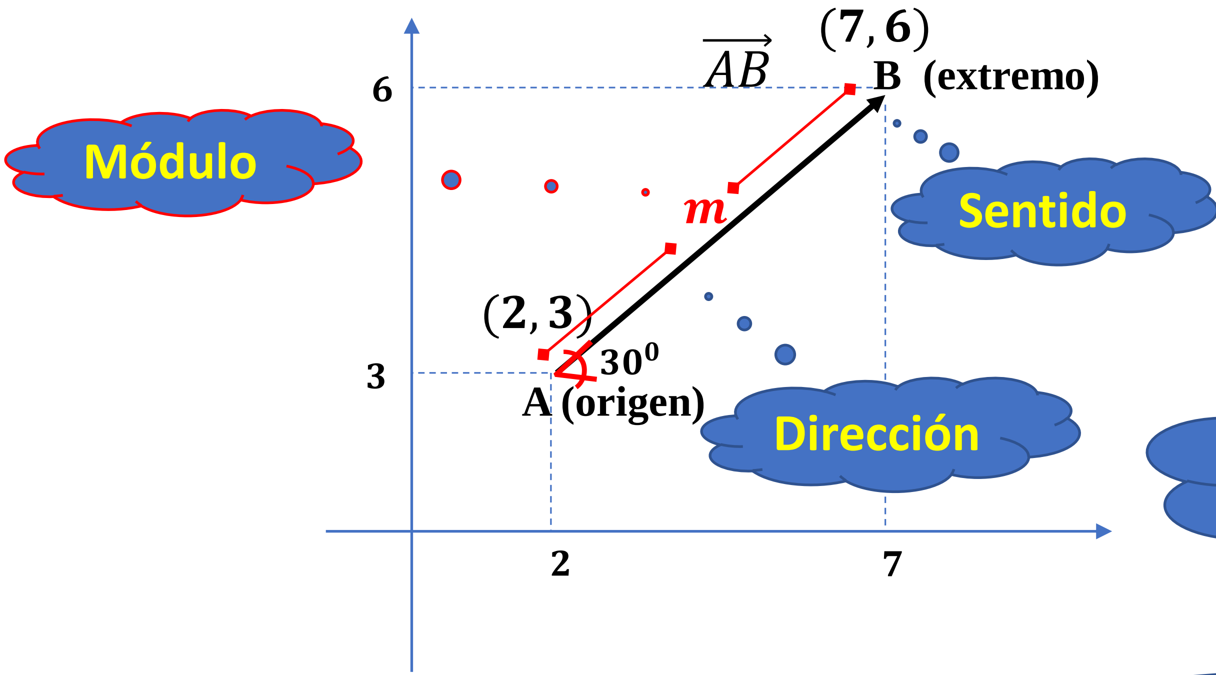
https://www.freepik.es/vector-gratis/concepto-ingenieria-informatica_5138520.htm

En la Ingeniería. Se consideran los campos gravitacionales, campos magnéticos, en la mecánica

https://concepto.de/vector/

ELEMENTOS DEL VECTOR

Un *vector, se representa* como un segmento dirigido con origen o punto de aplicación en A y extremo o punto terminal en B. Se representa por $\overrightarrow{AB}$.



$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\overrightarrow{AB} = (7,6) - (2,3)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\mathbf{5}, \mathbf{3})$$

El vector indica el punto de inicio y el punto final. Podemos ubicarlo.

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{5}, \mathbf{3})$$

El vector no indica el punto de inicio y el final; pero siendo el mismo vector podemos ubicarlo en cualquier otra posición; esta propiedad hace que le denominemos vector líbre.

$$\overrightarrow{AB} = (2,5) \qquad \vec{a} = (2,5) \qquad b = (2,5)$$

Un vector que se conoce el origen y el final

Un vector que no se conoce el origen y el final

También se le llama punto o radio vector

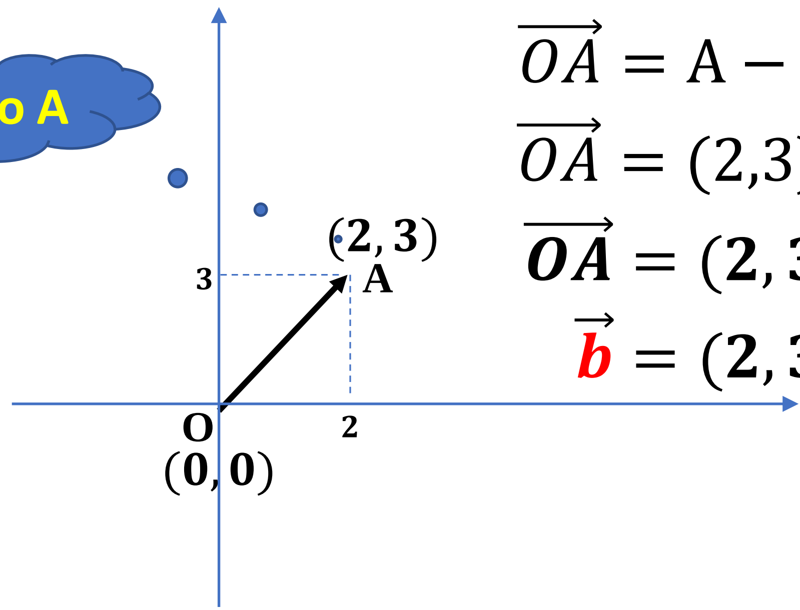
Un vector que se sabe el origen es el centro de coordenadas y el final

Todos son vectores, tienen dirección, módulo y sentido pero la nomenclatura indica que se debe saber interpretar.

RADIO VECTOR

El vector cuyo origen es el centro de coordenadas; se confunde con un punto, por ello se le denomina Radio Vector

Punto A



$$\overrightarrow{OA} = \mathrm{A} - \mathrm{O}$$

$$\overrightarrow{OA} = (2,3) - (0,0)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OA} = (2, 3)}$$

$$\boldsymbol{\vec{b} = (2, 3)}$$

El Punto A es un vector

El mismo vector como otra representación que no indica el origen ni final

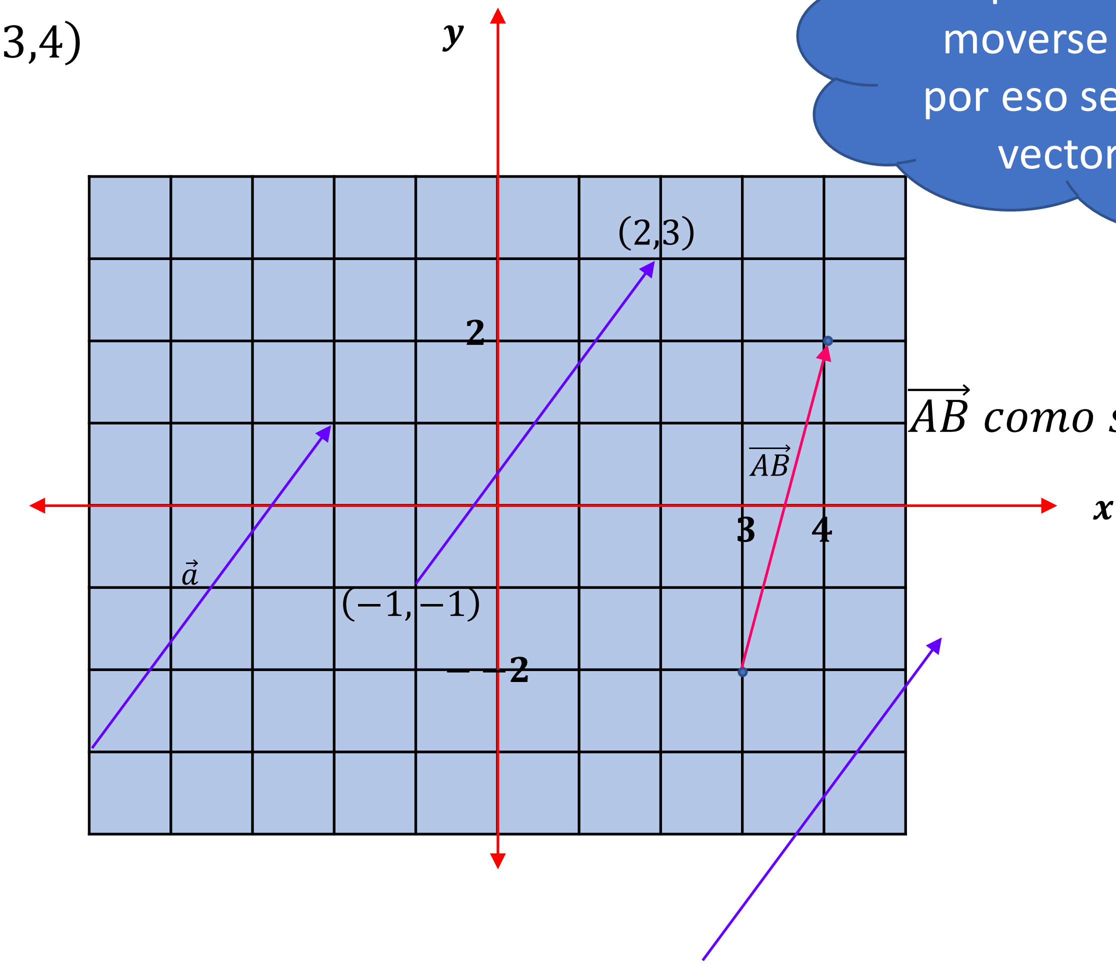
En este caso $\vec{\mathrm{b}}$ puede confundirse como un vector cuyo origen es otro punto que no es el centro de coordenadas; por ello para diferenciar al radio vector solo se escribe $\mathrm{b} = (2,3)$

REPRESENTACION DEL VECTOR

$Representar\ \overrightarrow{AB}\ si\ se\ sabe\ que\ A = (3,-2) y\ B(4,2)$

$Representar\ \vec{a}\ = (3,4)$

Un vector tiene la capacidad de poder moverse en el plano por eso se denominan vectores libres



$\overrightarrow{AB}\ como\ segmento\ orientado$

$También\ conocido\ como\ vector\ líbre$

IGUALDAD DE VECTORES

Se define

Dado dos vectores (a, b) y (c, d) son iguales si sus componentes son iguales.

$$\boldsymbol{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \wedge b = d}$$

1. Dados dos vectores $(3 - x, 5)$ y $(6, -2y - 3)$ Si son iguales, determine $x + y$

$$(3 - \text{x}; 5) = (6; -2\text{y} - 3)$$

Entonces: $3 - \text{x} = 6 \quad \wedge \quad 5 = -2y - 3$

$\text{x} = -3 \quad \wedge \quad y = -4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{x} + \text{y} = -7}$

Geométricamente dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales, si tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

SUMA DE VECTORES

<u>Se define</u>

Dado dos vectores (a, b) y (c, d) la suma se determina:

$$\boldsymbol{(a, b) + (c, d) \quad = (a + c, b + d)}$$

Dado dos vectores $(3,9)\ y\ (-7,5)$ .Determine la suma

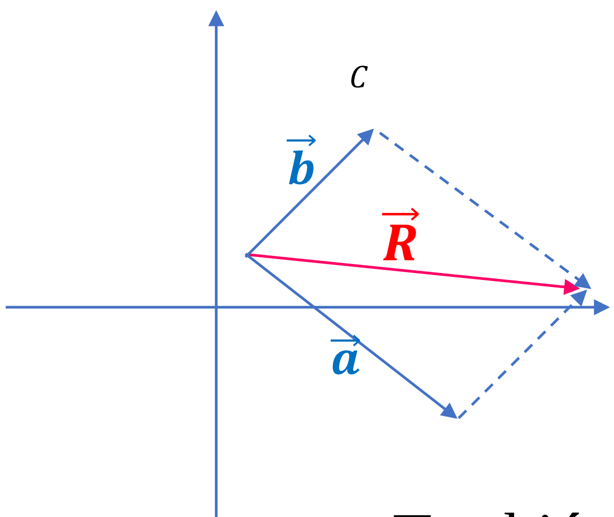
$$(3,9) + (-7,5) = (3 + (-7), 9 + 5)$$

$$= (-4,14)$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE VECTORES

Geométricamente la suma de dos vectores requiere conocer todos los elementos de los vectores.

1 Caso: cuando los vectores son concurrentes



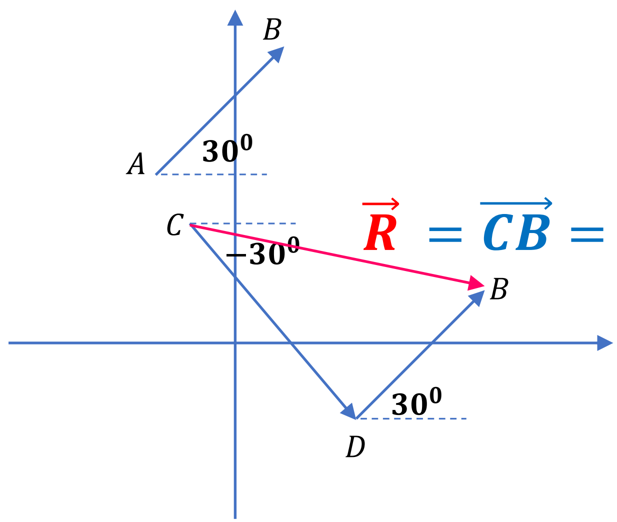
En Física a la suma le dicen Resultante

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

También se le conoce como el método del Paralelogramo

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE VECTORES

2 Caso: Cuando los vectores no son concurrentes $\boldsymbol{Hallar}$: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CB}}$



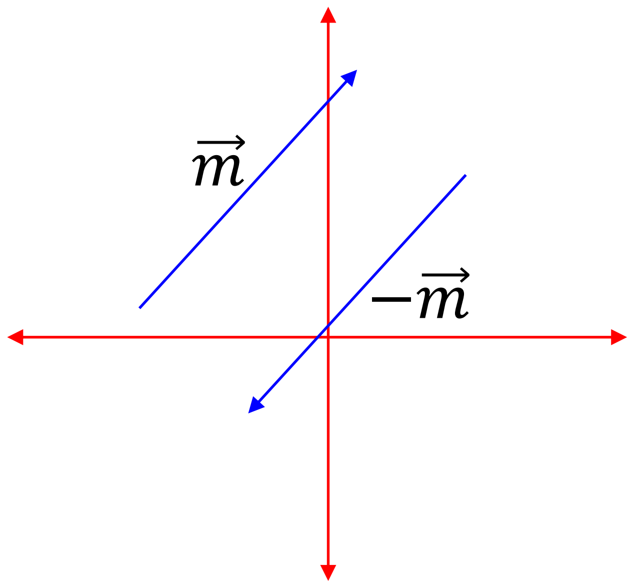
$$\vec{\boldsymbol{R}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$$

También se le conoce como el método del Triángulo

Para varias fuerzas le conocen como el método del Polígono

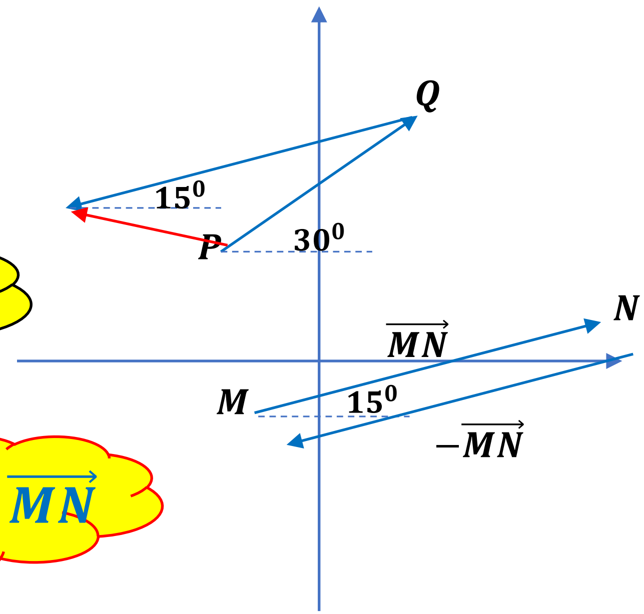
VECTOR OPUESTO REPRESENTACIÓN

Dado el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{m}} = (5,7)$; definimos el vector opuesto como $-\overrightarrow{\boldsymbol{m}}$.
Geométricamente mantiene el módulo y la dirección pero cambia el sentido.



REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIA DE VECTORES

Dados los vectores $\overrightarrow{PQ} = (5,8)$ y $\overrightarrow{MN} = (3,4)$. Halle geométricamente $\overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{MN})$



$$\vec{R} = \overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{MN})$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{MN}$$

A LA SUMA DE UN VECTOR CON EL OPUESTO DE OTRO VECTOR SE LE CONOCE COMO LA DIFERENCIA DE VECTORES

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

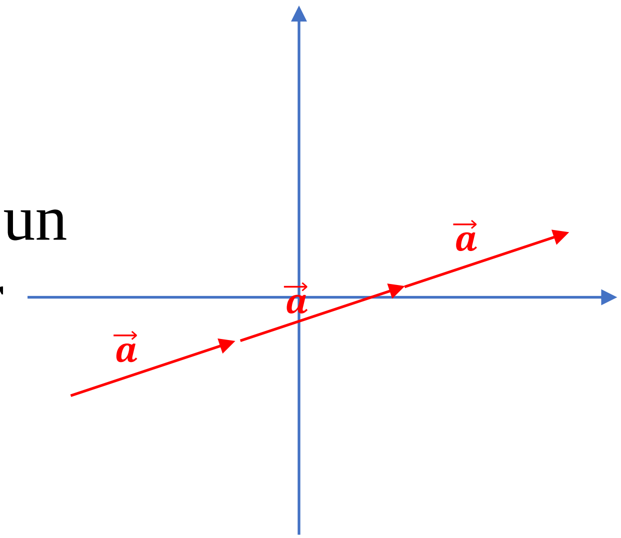
Dado un vector (a, b) y un escalar k, el producto se denota y resuelve de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{ka},\boldsymbol{kb})$$

Por Ejemplo: Sea $\vec{a} = (4{,}8)$ y el escalar $\mathrm{k} = 3$, halle $\mathrm{k}.\vec{a}$

$$\mathbf{3}.(\mathbf{4},\mathbf{8}) = (\mathbf{12},\mathbf{24})$$

Geométricamente la representación del producto de un escalar por un vector es una prolongación del vector



Universidad Tecnológica del Perú

MAGNITUD O MÓDULO DE UN VECTOR

Magnitud : Representa el valor de la magnitud física a la cual se asocia.

Sea $\vec{A} = (a, b)$; Denota por $\|A\|$ y se expresa

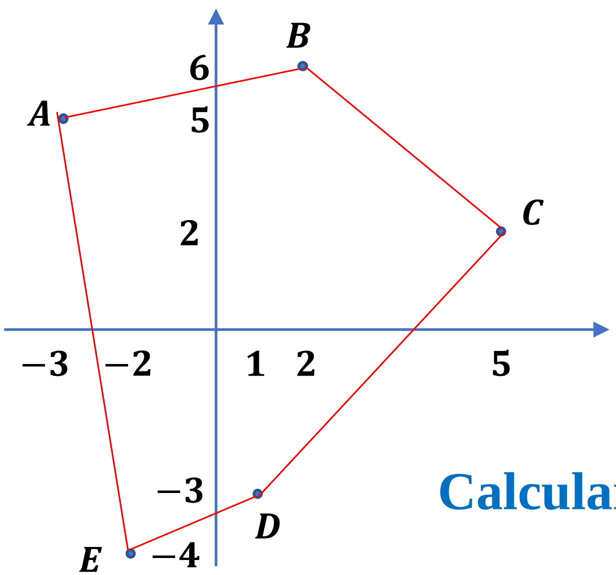
$$\|A\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$$

Para nuestro curso, la interpretación del vector será la distancia entre los puntos que forman el vector

Ejercicio de Aplicación

Dados los puntos o radio vectores $A=(-3,5)$; $B=(2,6)$; $C=(5,2)$; $D=(1,-3)$. Y $E=(-2,-4)$.Halle el perímetro de la figura formada por la unión de puntos.

Solución: Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DE};\overrightarrow{EA}$



$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=(2,6)-(-3,5)=(5,1)=\sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}=(5,2)-(2,6)=(3,-4)=\sqrt{25}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}=(1,-3)-(5,2)=(-4,-5)=\sqrt{41}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}=(-2,-4)-(1,-3)=(-3,-1)=\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{EA}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=(-3,5)-(-2,-4)=(-1,9)=\sqrt{82}$$

Calculamos los módulos $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right|;\left|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right|;\left|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\right|;\left|\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}\right|;\left|\overrightarrow{\boldsymbol{EA}}\right|$

$$\boldsymbol{Perímetro}=\sqrt{26}+5+\sqrt{41}+\sqrt{10}+\sqrt{82}$$

VECTOR UNITARIO

Se llama vector unitario, al vector cuyo módulo es 1; para este vector se reserva la letra "u".

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2} = 1$$

$$¿Cuál\ de\ los\ vectores\ es\ unitario?$$

$$\vec{a} = (-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$$

$$\vec{b} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

RPTA

CONVERSIÓN DE UN VECTOR A VECTOR UNITARIO

Problemas de aplicación requiere de vectores unitarios, pero por lo general los vectores no son unitarios.

$Dado\ un\ vector\ no\ unitario\ \vec{a} = (a_1, a_2)$ y su módulo $||\vec{a}||$

$$\boxed{\vec{u} = \left(\frac{a_1}{||\vec{a}||}, \frac{a_2}{||\vec{a}||}\right)}$$

Convertir el vector $\vec{a} = (3,7)\ a\ unitario$

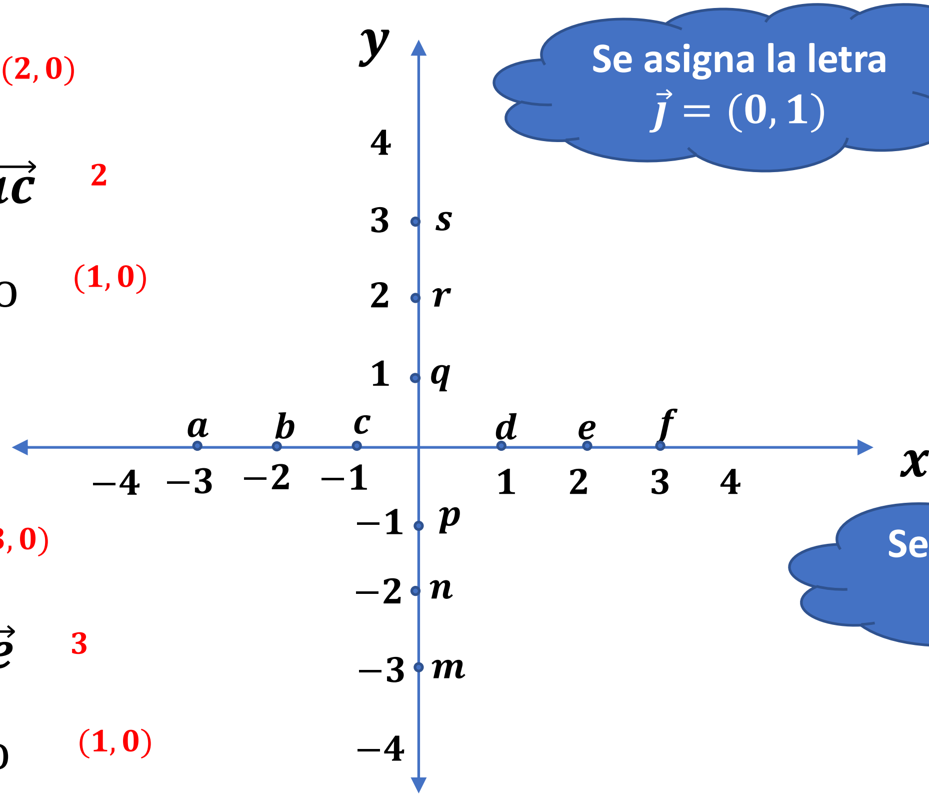
VECTORES UNITARIOS CANÓNICOS

Al tomar dos puntos del eje “x” y hallar el vector y su módulo, observaremos que no es unitario; pero al convertirlo en unitario aparece $(1, 0)$

Halle el vector $\overrightarrow{ac}$ $(2, 0)$

Halle el módulo de $\overrightarrow{ac}$ 2

Conviértalo en unitario $(1, 0)$



Se asigna la letra
$\vec{j} = (0, 1)$

Se asigna la letra
$\vec{i} = (1, 0)$

Halle el vector $\overrightarrow{ce}$ $(3, 0)$

Halle el módulo de $\overrightarrow{ce}$ 3

Conviértalo en unitario $(1, 0)$

Igualmente al tomar dos puntos del eje “y”, observaremos que no es unitario; pero al convertirlo en unitario aparece $(0, 1)$

DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES A SU FORMA CANÓNICA

Una de las aplicaciones de los vectores canónicos es la expresión de un vector en función de sus vectores canónicos.

Reemplazando i ; j

$$(8,5) = 8\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \longrightarrow (8,5) = 8(1,0) + 5(0,1)$$

$$(8,5) = (8,0) + (0,5)$$

$$(8,5) = (8,5)$$

Ejercicio de Aplicación

Dados los vectores: $\vec{a} = (-3{,}5)$ $\quad \vec{b} = (2{,}6)$ $\quad \vec{c} = (5{,}2)$

$Hallar: 5\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) + \vec{c}$

Convertimos los vectores a su forma canónica y resolvemos.

$\vec{a} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{b} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{c} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

$$5\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) + \vec{c} = 15\vec{a} - 10\vec{b} + \vec{c}$$

$$= 15(-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) - 10(2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) + 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$= -45\hat{\imath} + 75\hat{\jmath} - 20\hat{\imath} - 60\hat{\jmath} + 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$= -60\hat{\imath} + 17\hat{\jmath}$$

3 FINALMENTE

IMPORTANTE

1. Reconocer el módulo, la dirección y el sentido de un vector.
2. Operar vectores en R^2.
3. Todo vector puede ser unitario excepto el vector nulo.

Excelente tu participación

No hay nada como un reto para sacar lo mejor de nosotros.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Sigue practicando, vamos tu puedes!! .
2. No olvides que tienes un FORO para tus consultas.

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

3. Determine el o los valores que pueda tomar el vector $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$, si se tiene que:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{5} \; ; b_1 = b_2 + 1$$

SOLUCIÓN:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$5 = b_1^2 + b_2^2$$

$$5 = (b_2 + 1)^2 + b_2^2$$

$$5 = b_2^2 + 2b_2 + 1 + b_2^2$$

$$0 = 2b_2^2 + 2b_2 - 4$$

$$0 = b_2^2 + b_2 - 2$$

$$0 = (b_2 + 2)(b_2 - 1)$$

$$b_2 = -2 \qquad b_2 = 1$$

$$b_1 = -1 \qquad b_1 = 2$$

RPTA: $\vec{b} = (-1, -2)$ $\vec{b} = (2, 1)$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

5. Determine el valor de $\vec{x}$ en:

$$2\vec{x} - 3(1, -2) = 5(-1, 3) - \vec{x}$$

SOLUCIÓN:

$$2\vec{x} - (3, -6) = (-5, 15) - \vec{x}$$

$$3\vec{x} = (-5, 15) + (3, -6)$$

$$3\vec{x} = (-2, 9)$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{2}{3}, 3\right)$$

Universidad
Tecnológica
del Perú