

NÚMEROS COMPLEJOS \mathbb{C}

FORMA POLAR Y TRIGONOMETRICA



Universidad
Tecnológica
del Perú

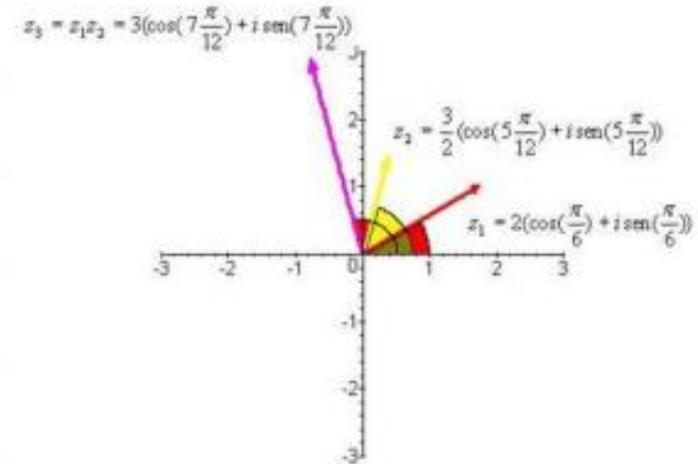
¿Para que sirven los números complejos?

En la *ingeniería* los números complejos se utilizan para describir circuitos eléctricos y ondas electromagnéticas



<https://www.tiposde.com/wp-content/uploads/ondas-electromagn%C3%A9ticas.jpg>

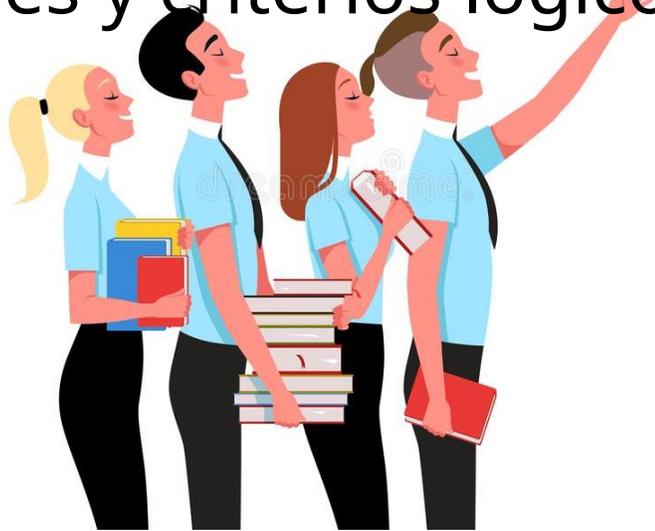
Se usan en la *navegación*, para ubicar una posición, dividiendo el plano complejo en semirectas separadas de 15° a 30° atravesando el origen. Uniéndolos con el Curvigráfico.



<https://www.tiposde.com/wp-content/uploads/ondas-electromagn%C3%A9ticas.jpg>

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante resuelve problemas donde utiliza conceptos de números complejos en su forma polar o trigonométrica con autonomía y seguridad, además identifica y aplica propiedades y criterios lógicos de solución.



FORMA POLAR

**FORMA
TRIGONOMÉTRICA**



Desaprende lo que te limita

1 MÓDULO

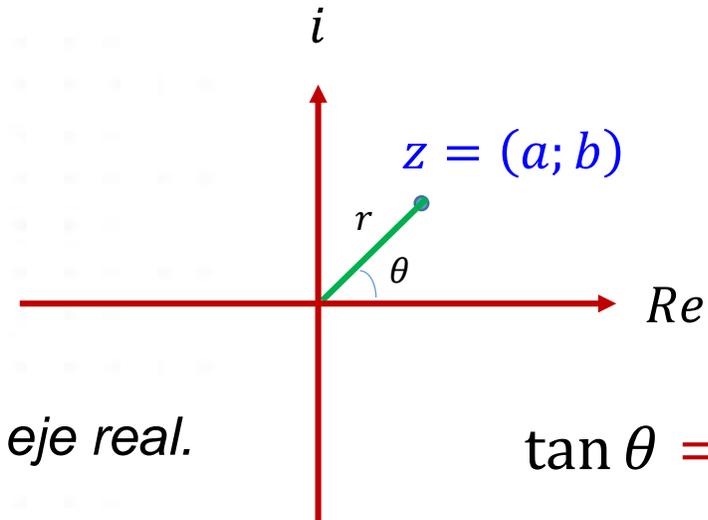
Dado $z = a + bi$, recordemos que el módulo está dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2 ARGUMENTO

Es el ángulo que forma el vector con el eje real.

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$r = |z|$$

3 FORMA POLAR

Siendo $z = a + bi$ en su forma binómica ó $z = (a; b)$ en su forma cartesiana, su forma polar se define como:

$$z = r\theta$$

Donde: $r = |z|$; $\theta = \arg(z)$.

También se puede expresar de la siguiente forma:

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

4 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sea $z = (a; b)$ un punto en el plano complejo, su forma trigonométrica es:

$$r_{\theta} = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$$

Se obtiene de asumir que:

$$a = r \cos(\theta); \quad b = r \operatorname{sen}(\theta)$$

luego se deduce que:

$$z = a + bi \quad ; \quad z = (a, bi)$$

$$r_{\theta} = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$$

5 OPERACIONES

Dados $z = a + bi$ y $z' = c + di$, cuyas formas polares está dado por $z = r_{\theta}$ y $z' = r_{\beta}$ se tiene que:

$$r_{\theta} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\theta+\beta}$$

$$\frac{r_{\theta}}{r'_{\beta}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\beta}$$

$$(r_{\theta})^n = (r^n)_{n\theta}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Represente en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y trigonométrica:

$$z_1 = 3 + \sqrt{5}i ; z_2 = -4 - 6i ; z_3 = -3 + 2i$$

SOLUCIÓN:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{9 + 5} = \sqrt{14}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 36.7^\circ$$

$$r_\theta = \sqrt{14}_{36.7^\circ}$$

$$r_\theta = \sqrt{14}(\cos(36.7^\circ) + i\text{sen}(36.7^\circ))$$

$$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-6}{-4}\right) = 56.3^\circ$$

$$180^\circ + 56^\circ = 236.3^\circ$$

$$r_\theta = \sqrt{52}_{236.3^\circ}$$

$$r_\theta = \sqrt{52}(\cos(236.3^\circ) + i\text{sen}(236.3^\circ))$$

$$|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = -33.7^\circ$$

$$180^\circ - 33.7^\circ = 146.3$$

$$r_\theta = \sqrt{13}_{146.3^\circ}$$

$$r_\theta = \sqrt{13}(\cos(146.3^\circ) + i\text{sen}(146.3^\circ))$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Calcular y expresar en forma polar y trigonométrica

$$M = \frac{2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i^{15}}{2(2 + i) - (3 - 2i) + 3 - i^3}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(6 - 4i) + (2 + i) - 5 - (-i)}{(4 + 2i) - (3 - 2i) + 3 - (-i)} \\ &= \frac{3 - 2i}{4 + 5i} \cdot \frac{(4 - 5i)}{(4 - 5i)} \\ &= \frac{2 - 23i}{41} \\ &= \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i \end{aligned}$$

$$|M| = \sqrt{\left(\frac{2}{41}\right)^2 + \left(-\frac{23}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{533}}{41}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{23}{2}\right) = -85^\circ$$

$$360^\circ - 85^\circ = 275^\circ$$

$$r_\theta = \frac{\sqrt{533}}{41} \quad 275^\circ$$

$$r_\theta = \frac{\sqrt{533}}{41} (\cos(275^\circ) + i\sin(275^\circ))$$



LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS



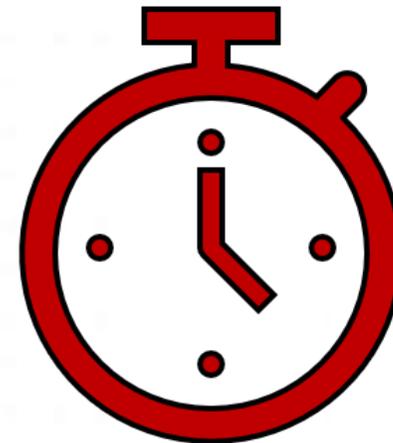
Universidad
Tecnológica
del Perú

Experiencia Grupal

Desarrollar los ejercicios en equipos



Equipos de 5 estudiantes



Tiempo : 20 min

EJERCICIOS RETOS

1. Determine el valor de z en su forma polar y trigonométrica.

$$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^8 (\sqrt{3} - i)^6}{(-1 + i)^4}$$

2. Demostrar que: $e^{2\pi i} = 1$.

3. Si $z = r e^{i\theta} \rightarrow z = r e^{-i\theta}$.

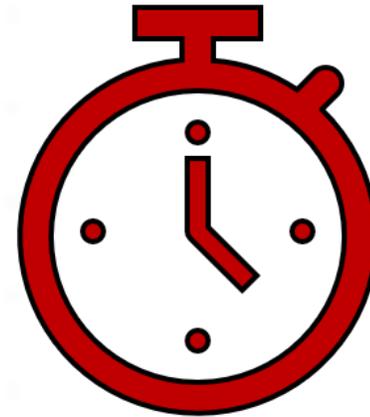
4. Hallar el módulo del número complejo: e^{2+i}

5. Expresar en la forma binómica el número complejo: $e^{\frac{\pi}{6}i}$

Espacio de Preguntas



Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. Comparte tus dudas de la sesión o de los ejercicios y problemas que acaban de trabajar en los grupos. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



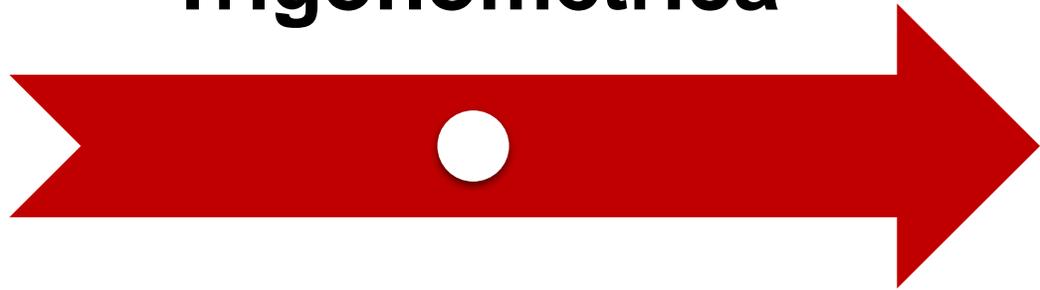
Tiempo : 10 min

Conclusiones

1. Es importante considerar en que cuadrante se encuentra Z para hallar correctamente el argumento (ángulo).
2. Expresar Z en su forma polar, requiere del módulo y argumento.



Forma Polar y Trigonométrica



Lo logré



Desaprende lo que te limita

3 FINALMENTE



Excelente tu
participación

Sólo llegaras rápido juntos
llegaremos lejos.



Ésta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**