

MATRICES

DETERMINANTE E INVERSA



Universidad
Tecnológica
del Perú

¿Para qué me sirve la determinante de una matriz?

Resuelven muchos problemas:

- ✓ Nos ayuda a resolver un sistema de ecuaciones.
- ✓ Geométricamente nos ayuda a encontrar el volumen del paralelepípedo que forman 3 vectores.



Celosías isostáticas.

Estructuras isostáticas de nudos articulados



<https://es.slideshare.net/lopezcolina/2-celosas>

Finalmente todo con el *cálculo matricial*

- Estudio del genoma humano
- Circuitos eléctricos
- Presiones hidrostáticas
- Análisis de velocidades
- Espejos dieléctricos
- Teoría de grafos, redes etc.

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios aplicados a la ingeniería donde utiliza conceptos y propiedades de matrices, determinantes e inversa.



DETERMINANTE

INVERSA



Desaprende lo que te limita

1 DETERMINANTE (orden 1 y 2)



DE ORDEN 1

Si $A = |a_{11}|$, entonces
 $|A| = a_{11}$

$$|A| = |-3| = -3$$

DE ORDEN 2

Si $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces
 $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1)(2) - (3)(-5) \\ &= 17 \end{aligned}$$

¡ATENCIÓN!

EJEMPLO 1

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. Calcular la $|A|$; $|B|$ y $|AB|$.

$$|A| = 7 - 8 = -1$$

$$|B| = -10 - (-21) = 11$$

$$|AB| = |A||B| = -1(11) = -11$$



1 DETERMINANTE (orden MAYOR)

DE ORDEN n

$$|A| = \sum (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A(i/j))$$

La sumatoria del producto de los elementos de una línea cualquiera de la matriz (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos o sub-matrices.

Para este método elijo la fila o columna que yo quiera, entonces me conviene la que tenga mas ceros.



¡ATENCIÓN!

EJEMPLO 2

Dado $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, calcule su determinante por el método de sub-matrices.

$$\begin{aligned} B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} &\rightarrow = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(-5 - (-4)) - 5(15 - (-6)) - 4(6 - (-3)) \\ &= 1(-1) - 5(21) - 4(9) \\ &= -1 - 105 - 36 \\ &= -142 \end{aligned}$$

*Debemos tener
en cuenta los
signos!*

$$B = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

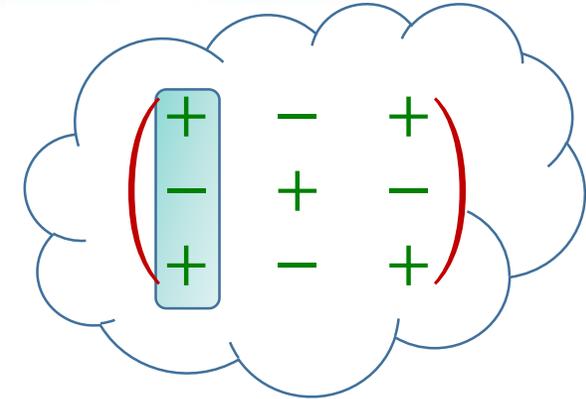


2

MÉTODO DE SARRUS – MÉTODO SUB-MATRICES (SOLO orden 3)

EJEMPLO 3

Calcular la determinante de la matriz mediante Sarrus y sub-matrices:



SARRUS

$$\begin{array}{l}
 18 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 \\
 2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3 \\
 -5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \\
 \overline{15} \qquad \qquad \qquad \overline{13}
 \end{array}$$

$$|A| = 13 - 15 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

SUB-MATRICES

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(10 - 2) - 1(-5 - (-3)) + 3(2 - 6)$$

$$|A| = 8 + 2 - 12 = -2$$

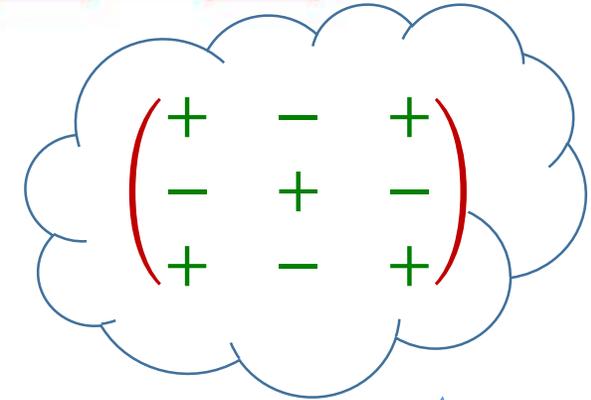
Tenemos el mismo resultado!

3 MATRIZ INVERSA

Sea la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ de orden n , su inversa existe si y solo si $|A| \neq 0$ y se denota como A^{-1} , luego:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

- La matriz adjunta $Adj(A)$ es igual a la transpuesta de la matriz de cofactores de A .
- La matriz de cofactores $Cof(A)$ esta compuesta por toda las sub-matrices de A , donde cada elemento tiene la forma: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A(i/j))$.



¡ATENCIÓN!

EJEMPLO 4

Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallamos el determinante de $A \rightarrow |A| = -11$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$Men(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 \\ -5 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Determine el valor de x si se cumple que:

$$\begin{vmatrix} 1 - 2x & 1 & 3 \\ x - 3 & -5 & 0 \\ -4 & x - 4 & 2 \end{vmatrix} = -22$$

Solución:

$$3 \begin{vmatrix} x - 3 & -5 \\ -4 & x - 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 - 2x & 1 \\ -4 & x - 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 - 2x & 1 \\ x - 3 & -5 \end{vmatrix} = -22$$

$$3(x^2 - 7x + 12 - 20) + 2(-5 + 10x - x + 3) = -22$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 ; x = -1$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

$$AX = B \xrightarrow{A^{-1}} X = A^{-1}B$$

$$\text{Men}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 8 & -11 & -7 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -11 & -4 & 5 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -11 & -4 & 5 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -16 + 6 - 16 \\ 22 - 12 + 20 \\ 14 - 6 + 12 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -26 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$



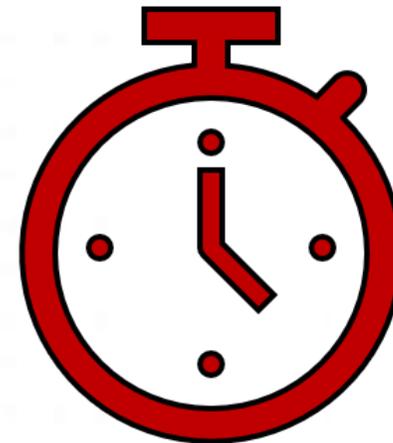
LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS

Experiencia Grupal

Desarrollar los ejercicios en equipos



Equipos de 5 estudiantes



Tiempo : 20 min

EJERCICIOS RETOS

1. Determine el valor de x si se cumple que:
$$\begin{vmatrix} 15 - 2x & 11 & 10 \\ 11 - 3x & 17 & 16 \\ 7 - x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, Hallar (si existe) X tal que $A X B = I$

3. Calcular la determinante de tercer orden
$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b - c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c - a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a - b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

4. Calcular la determinante de tercer orden
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \cos(\beta - \gamma) & \cos(\delta - \alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) & \cos(\beta + \gamma) & \cos(\delta + \alpha) \\ \sin(\alpha + \beta) & \sin(\beta + \gamma) & \sin(\delta + \alpha) \end{vmatrix}$$

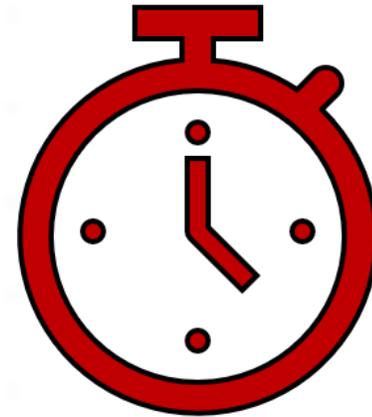
5. Por el Método de la Adjunta, Hallar la inversa, si existe, para la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Espacio de Preguntas



Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. Comparte tus dudas de la sesión o de los ejercicios y problemas que acaban de trabajar en los grupos. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 10 min

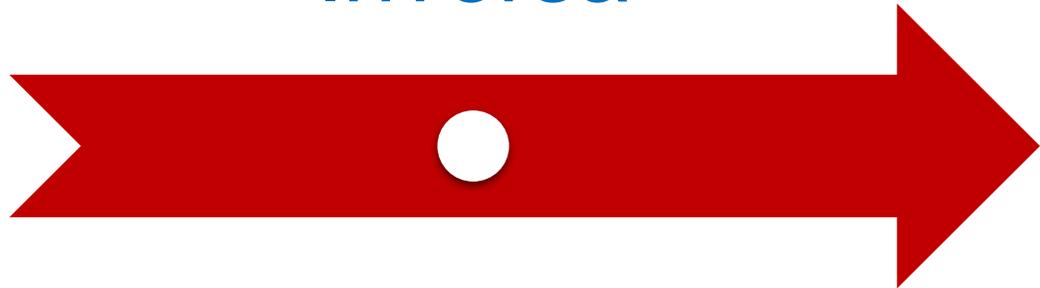
Conclusiones

1. Aprendimos a hallar el determinante y la inversa por el método de la Adjunta.
2. No debes olvidar los signos para la matriz de cofactores.
3. Recuerda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$$



Determinante e
Inversa



Lo logré



Desaprende lo que te limita

FINALMENTE



Gracias por tu
participación

Recuerda aprender feliz es
aprender para siempre.



Ésta sesión quedará
grabada para tus
consultas.



PARA TI

1. Realiza la Tarea de ésta sesión y prepárate par tu evaluación.
2. Consulta en el FORO tus dudas.



Desaprende lo que te limita



**Universidad
Tecnológica
del Perú**