ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

ÁNGULO ENTRE RECTAS EN $\mathcal{R}^3$

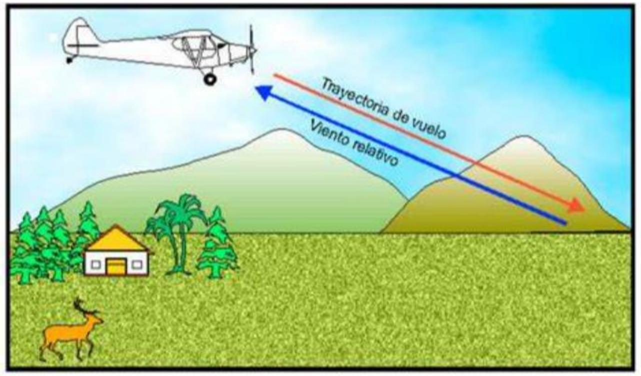
Universidad Tecnológica del Perú

¿Cuál es la utilidad de la recta en $\mathbb{R}^3$?

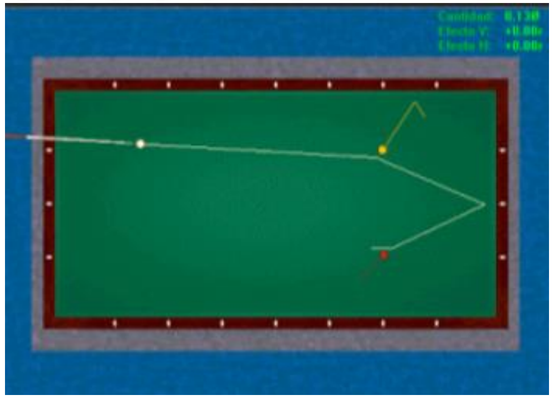
Universidad Tecnológica del Perú

Sirve para determinar, representar y calcular las ecuaciones de la rectas en tres dimensiones.
Se encuentran en el estudio del álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, análisis matemático, calculo, etc.

En un viaje, tienes un origen y un destino, conoces distancias, con esto puedes sacar el tiempo que te tomara llegar el destino.



Jugar al billar (conociendo el ángulo apropiado)



Se utilizar para hacer estructuras paralelas y perpendiculares en el espacio.

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante reconoce la posición entre dos rectas en el espacio determinando su ángulo y resolviendo problemas de aplicación.

ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

ÁNGULO ENTRE RECTAS

DISTANCIA ENTRE RECTAS

Universidad Tecnológica del Perú

Desaprende lo que te limita

1 ÁNGULO ENTRE 2 RECTAS

Si dos rectas $L_1 : P = P_1 + t\vec{v}$; $L_2 : P = P_2 + t\vec{w}$ *en el espacio no son paralelas, existe la posibilidad que se crucen (presentes en distintos planos) o que se intersecten (presentes en un mismo plano). En cualquiera de los casos, existe un ángulo entre dichas rectas y esta definido por:*

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}\right)$$

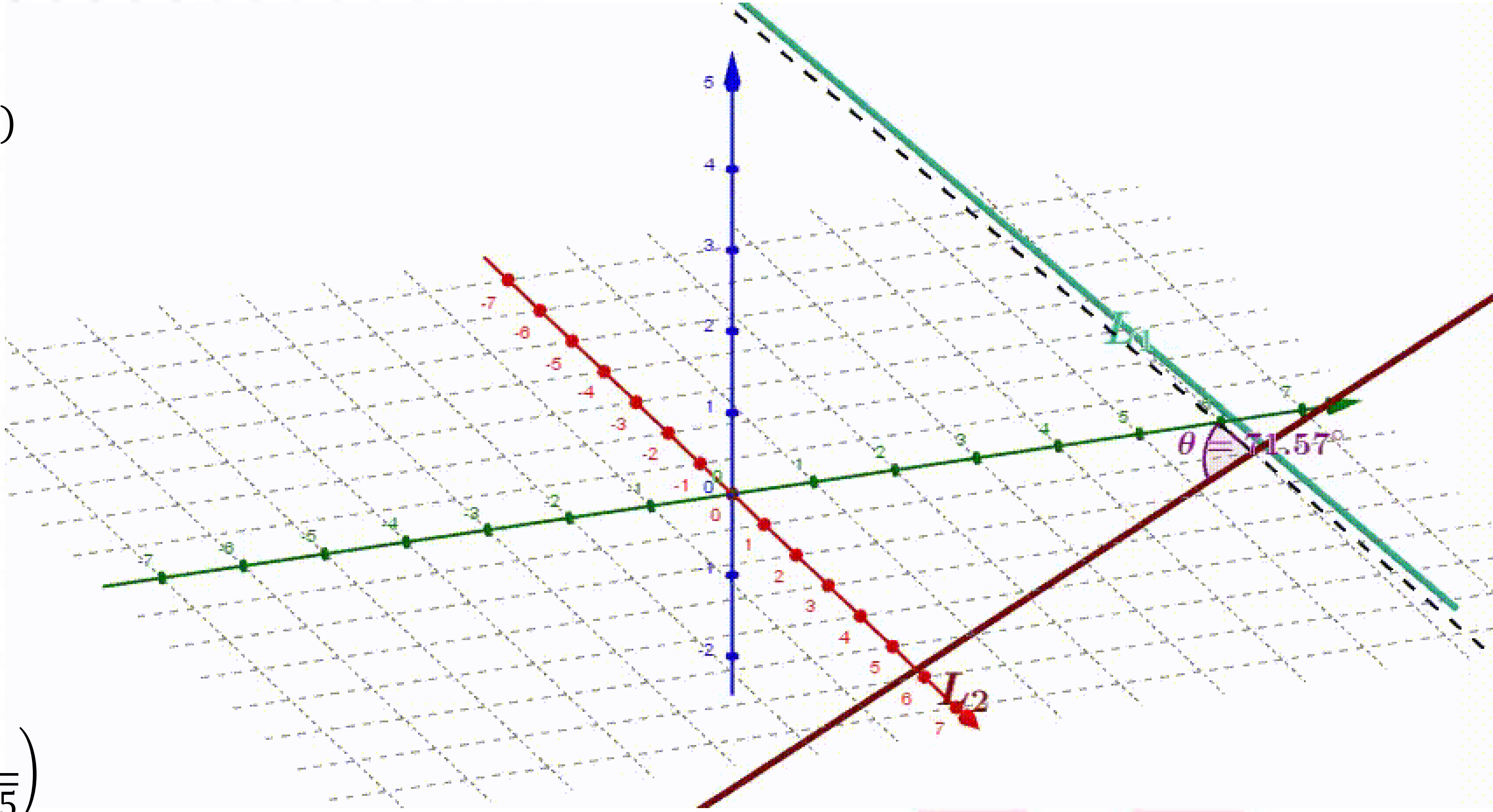
Ejemplo. *Hallar el ángulo que forman las rectas:*

$$L_1: x = -4 \ ; \ \ y + z = 6 \quad y \quad L_2: P = (1, 2, -2) + t(0, 2, 1)$$

SOLUCIÓN:

$$L_1: \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 - t \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (0, -1, 1) \qquad ||\vec{v}|| = \sqrt{2}$$

$$L_2: \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = (0, 2, 1) \qquad ||\vec{w}|| = \sqrt{5}$$



$$\vec{v}.\vec{w} = (0, -1, 1).(0, 2, 1)$$

$$\vec{v}.\vec{w} = 0 - 2 + 1 = -1$$

$$\theta = Arc\cos\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}\right) = Arc\cos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}\right)$$

RPTA: $\theta = 71.6°$

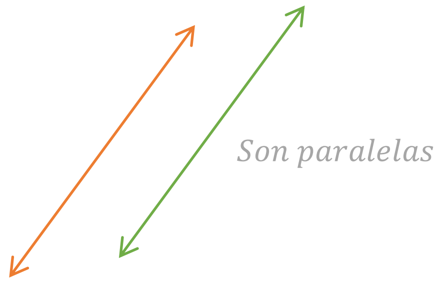
Universidad Tecnológica del Perú

2 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS

Si L_1 y L_2 son paralelas

NO se CRUZAN

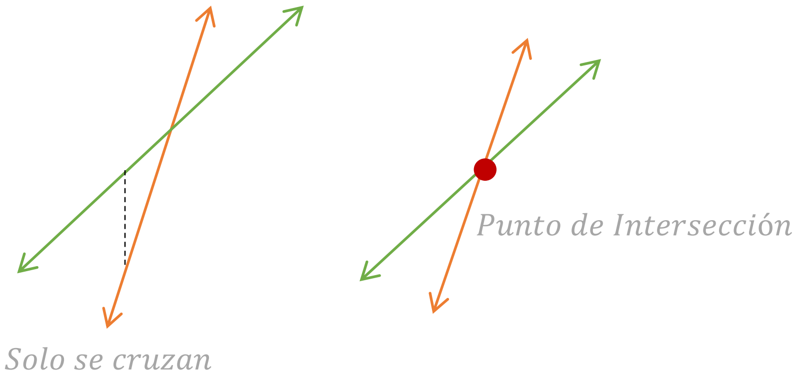
NO se INTERSECAN



Si L_1 y L_2 **NO** son paralelas

Se CRUZAN o

Se INTERSECAN



3 RECTAS QUE SE CRUZAN

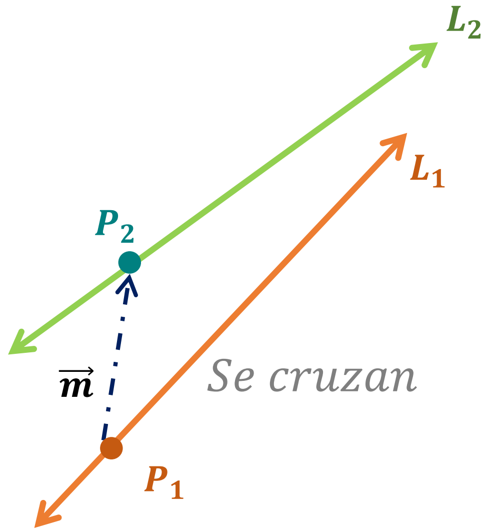
Dadas la rectas

$$L_1: P = P_1 + t\vec{v} \quad ; \quad L_2: P = P_2 + t\vec{w}$$

se cumple que:

$$\vec{m} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$[\vec{m} \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2] \neq 0$$



4 RECTAS QUE SE INTERSECAN

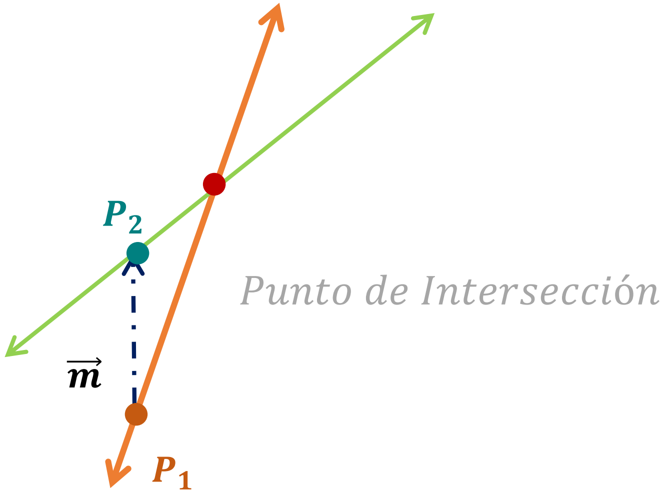
Dadas la rectas

$$L_1: P = P_1 + t\vec{v} \ ; L_2: P = P_2 + t\vec{w}$$

se cumple que:

$$\vec{m} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

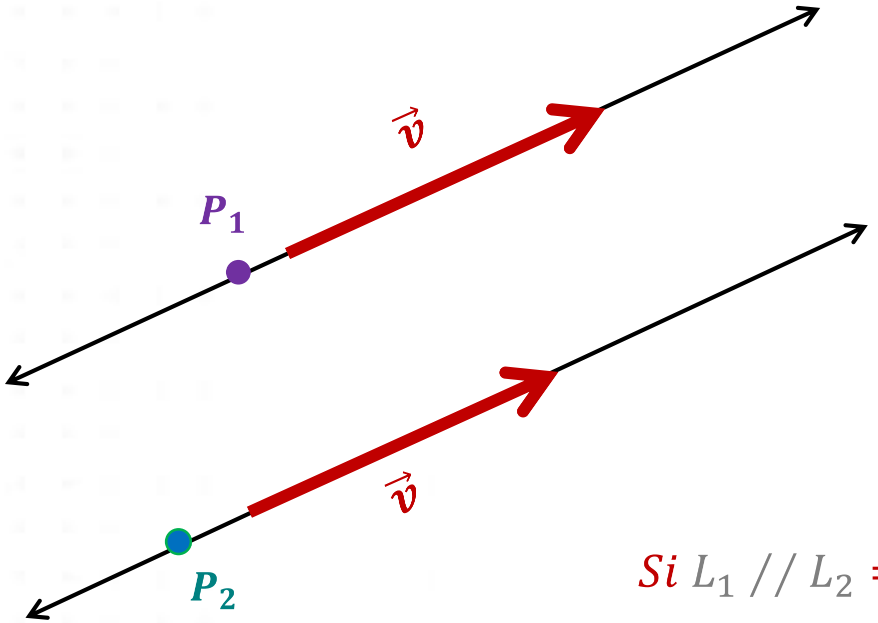
$$[\vec{m} \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2] = 0$$



5 Distancia entre dos Rectas Paralelas

Dadas las rectas paralelas $\boldsymbol{L_1}: \boldsymbol{P = P_1 + t\vec{v}}$ *y* $\boldsymbol{L_2}: \boldsymbol{P = P_2 + t\vec{v}}$*, la distancia entre ambas rectas está determina por la fórmula anterior, considerando un punto de una de las rectas(en este caso* $\boldsymbol{P_1} \in \boldsymbol{L_1}$*), es decir:*

$$d(P_2, L) = \sqrt{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2}$$

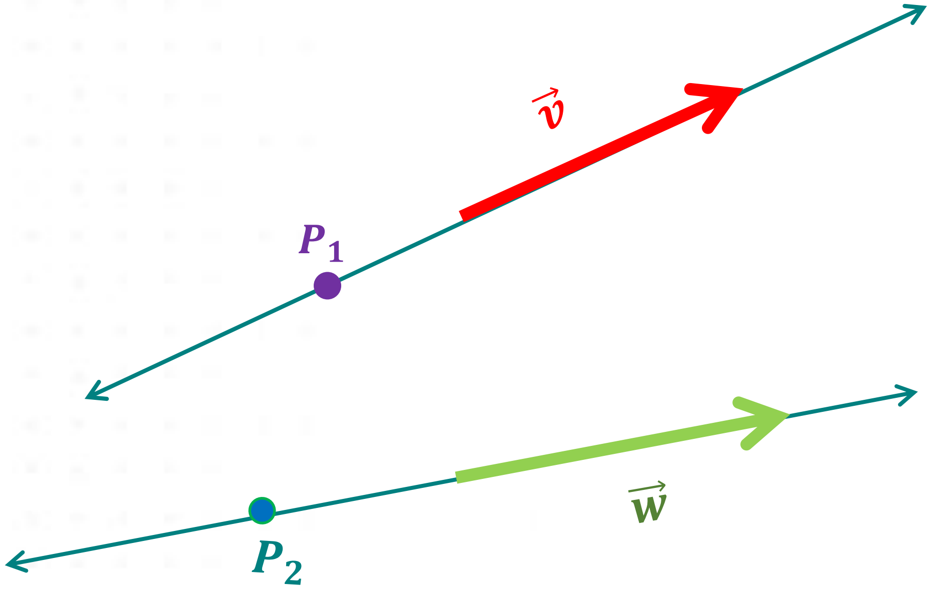


$Si\ L_1 \,//\, L_2 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

6 DISTANCIA entre dos Rectas NO Paralelas

Dadas las rectas no paralelas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}$ *y* $L_2: P = P_2 + t\vec{w}$*, la distancia entre ambas rectas está determina por:*

$$d\,(L_1\,,L_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|}{\left\|\vec{v}\times\vec{w}\right\|}$$



Ejemplo. *Hallar la distancia entre las rectas:*

$$L_1: x = -4\ ;\ y + z = 6 \quad y \quad L_2: P = (1,2,-2) + t(0,2,1)$$

SOLUCIÓN:

$$L_1: x = -4\ ;\ y + z = 6$$

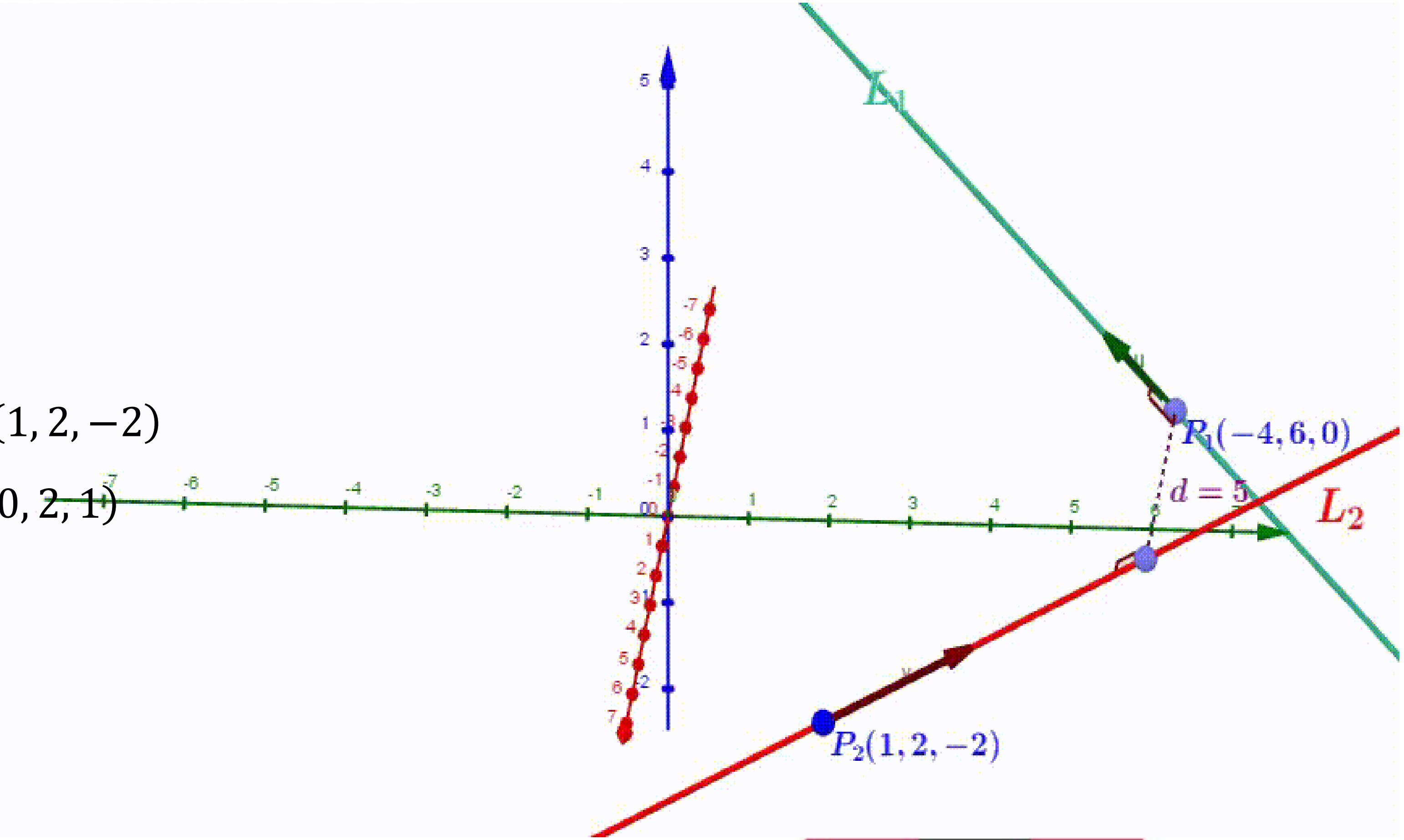
$$L_1: \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = (-4,6,0) \\ \vec{v} = (0,-1,1) \end{cases}$$

$$L_2: P = (1,2,-2) + t(0,2,1) \Rightarrow \begin{cases} P_2 = (1,2,-2) \\ \vec{w} = (0,2,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,2,-2) - (-4,6,0) = (5,-4,-2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (-3,0,0)$$

$$d(Q,L) = \frac{|(5,-4,-2)\cdot(-3,0,0)|}{\|(-3,0,0)\|} = \frac{|-15|}{\sqrt{9}} = 5$$



RPTA: $d(Q,L) = 5$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Hallar el punto simétrico de $A(4,6,-1)$ respecto a la recta
   $L: P = (1,2,2) + r(2,-1,3)$

SOLUCIÓN:

$Q = (1+2r, 2-r, 2+3r)$

$A = (4,6,-1)$

$\overrightarrow{QA} = (3-2r, 4+r, -3-3r)$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \vec{v} = 0$$

$(3-2r, 4+r, -3-3r) \cdot (2,-1,3) = 0$

$6 - 4r - 4 - r - 9 - 9r = 0$

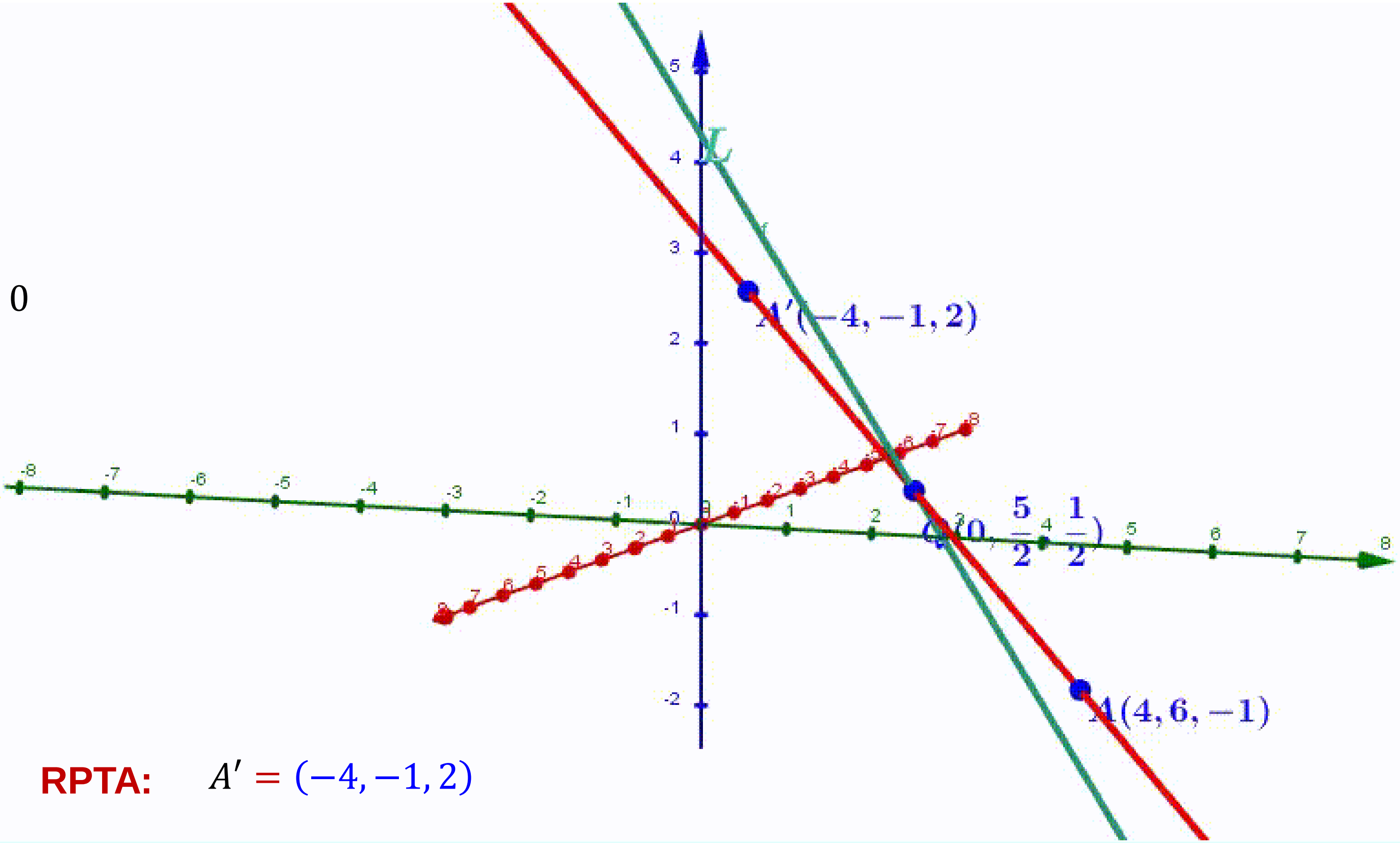
$r = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$A' = (x,y,z)$

$A = (4,6,-1)$

$PM(AA') = Q$

$$\left(\frac{x+4}{2}, \frac{y+6}{2}, \frac{z-1}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



RPTA: $A' = (-4,-1,2)$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

Universidad Tecnológica del Perú

2. Hallar la distancia entre las rectas:

$$L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad y \quad L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$$

SOLUCIÓN:

$$L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = (-2, 1, -1) \\ \vec{v} = (2, 3, -1) \end{cases}$$

$$L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = (1, -1, 2) \\ \vec{w} = (-1, 2, 4) \end{cases}$$

$v_1 \neq v_2$ NO son paralelas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, 2) - (-2, 1, -1) = (3, -2, 3)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (14, -7, 7)$$

$$d(Q, L) = \frac{|(3, -2, 3) \cdot (14, -7, 7)|}{\|(14, -7, 7)\|}$$

$$= \frac{|77|}{7\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{6}}{6}$$

RPTA: $d(Q, L) = \dfrac{11\sqrt{6}}{6}$

LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS

Universidad Tecnológica del Perú

Experiencia Grupal

Desarrollar los ejercicios en equipos

Equipos de 5 estudiantes

Tiempo : 20 min

EJERCICIOS RETOS

1. Hallar el punto simétrico de $P(3,2,1)$, respecto a la recta $L=\{(1,2,1)+t(2,3,2\sqrt{3})\}$.

2. Calcular la distancia entre las rectas $L_1\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-1}$ y $L_2\colon \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{1}$.

3. Dados las rectas $L_1\colon \frac{x+6}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ y $L_2\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}, z=2$, que se cruzan; determinar un punto en cada recta, tales que la distancia entre los puntos sea mínima.

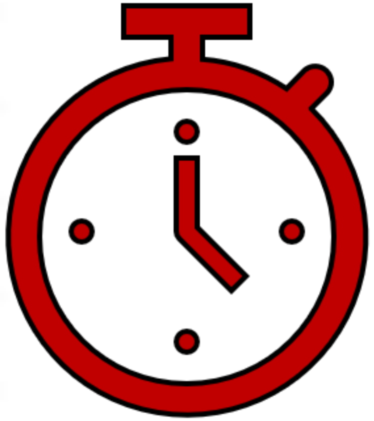
4. Dados los vértices de un triángulo $A(2,-1,-3), B(5,2,-7)$ y $C(-7,11,6)$. Hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo externo del vértice A.

5. Dados las rectas $L_1\colon \frac{x+6}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ y $L_2\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}, z=2$, que se cruzan; determinar el ángulo que forman.

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas

Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. Comparte tus dudas de la sesión o de los ejercicios y problemas que acaban de trabajar en los grupos. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 10 min

Universidad Tecnológica del Perú

Conclusiones

1. El ángulo que forman dos rectas es el mismo ángulo que forman sus vectores directores.

2. La distancia entre dos rectas que se cruzan siempre es la mínima .

3. La distancia entre dos rectas paralelas es la misma que la distancia de un punto de una recta a la otra recta.

Desaprende lo que te limita

Rectas paralelas y ortogonales en $\mathcal{R}^3$

Lo logré

Desaprende lo que te limita

3 FINALMENTE

Excelente tu participación

Mis debilidades las hago fortalezas.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

👍

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú