ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

ECUACIONES DE LAS RECTAS Y DISTANCIAS

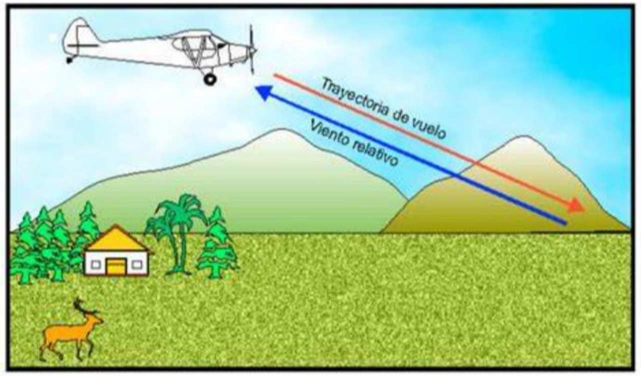
Universidad Tecnológica del Perú

¿Cuál es la utilidad de la recta en $\mathbb{R}^3$?

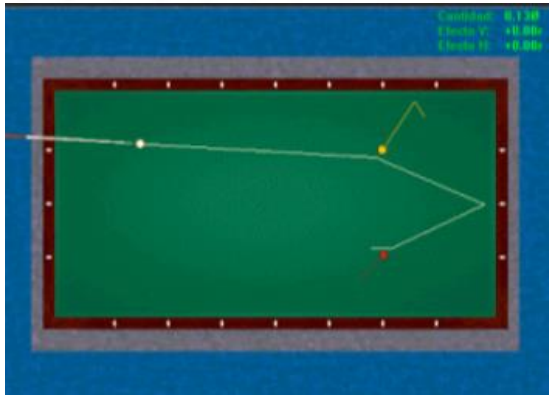
Sirve para determinar, representar y calcular las ecuaciones de la rectas en tres dimensiones.

Se encuentran en el estudio del álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, análisis matemático, calculo, etc.

En un viaje, tienes un origen y un destino, conoces distancias, con esto puedes sacar el tiempo que te tomara llegar el destino.



Jugar al billar (conociendo el ángulo apropiado)



Se utilizar para hacer estructuras paralelas y perpendiculares en el espacio.

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante determina las distintas ecuaciones de la recta en el espacio e identifica el punto de paso y vector director en todas ellas. Así también determina la distancia de un punto a una recta o entre rectas.

ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

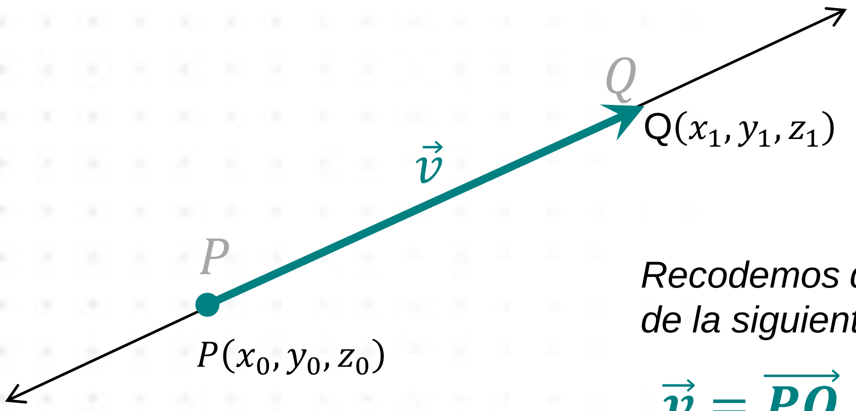
ECUACIONES DE RECTAS

DISTANCIAS

Desaprende lo que te limita

I. La Recta

Una recta en el espacio está bien determinada, si se especifica su ***dirección*** *y uno de sus* ***puntos****; es así que podemos denotar la ecuación de una recta* $\boldsymbol{L}$ *como aquella que pasa por un punto* $\boldsymbol{P_0}$ *y en la dirección de un vector* $\vec{\boldsymbol{v}}$ *paralelo a ella.*



Recodemos que un vector se determina de la siguiente forma:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}$$

1 ECUACIÓN VECTORIAL

Aquella que pasa por un punto $\boldsymbol{P_0}$ en la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$$L : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{t}\vec{v}$$

Donde:

P : punto cualquiera (x, y, z)

P_0 : punto de paso (x_0, y_0, z_0)

$\mathbf{t}$: parametro $t \in \mathbb{R}$

$\vec{v}$: vector director (a, b, c)

2 ECUACIÓN PARAMÉTRICA

Considerando que la ecuación vectorial se escribe de la siguiente forma:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Se puede deducir la ecuación paramétrica como sigue:

$$L : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$

3 ECUACIÓN SIMÉTRICA

Es aquella ecuación que resulta de despejar el parámetro **t** *en cada una de las ecuaciones paramétricas para luego igualarlas, observemos:*

$$L: \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$t \in \mathbb{R}$

Ejemplo. *Determine la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(2,-2,-3)$ y $B(-1,4,-2)$. Encuentre un punto adicional y la intersección con el plano XZ.*

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4,-2) - (2,-2,-3) = (-3,6,1)$$

Ecuación Vectorial

$$P = (2,-2,-3) + t(-3,6,1)$$

Ecuación Paramétrica

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Ecuación Simétrica

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-(-2)}{6} = \frac{z-(-3)}{1}$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{6} = z+3$$

Como $t \in \mathbb{R} \Longrightarrow t = 2$

$$P = (2,-2,-3) + (2)(-3,6,1)$$

$$P = (-4,10,-1)$$

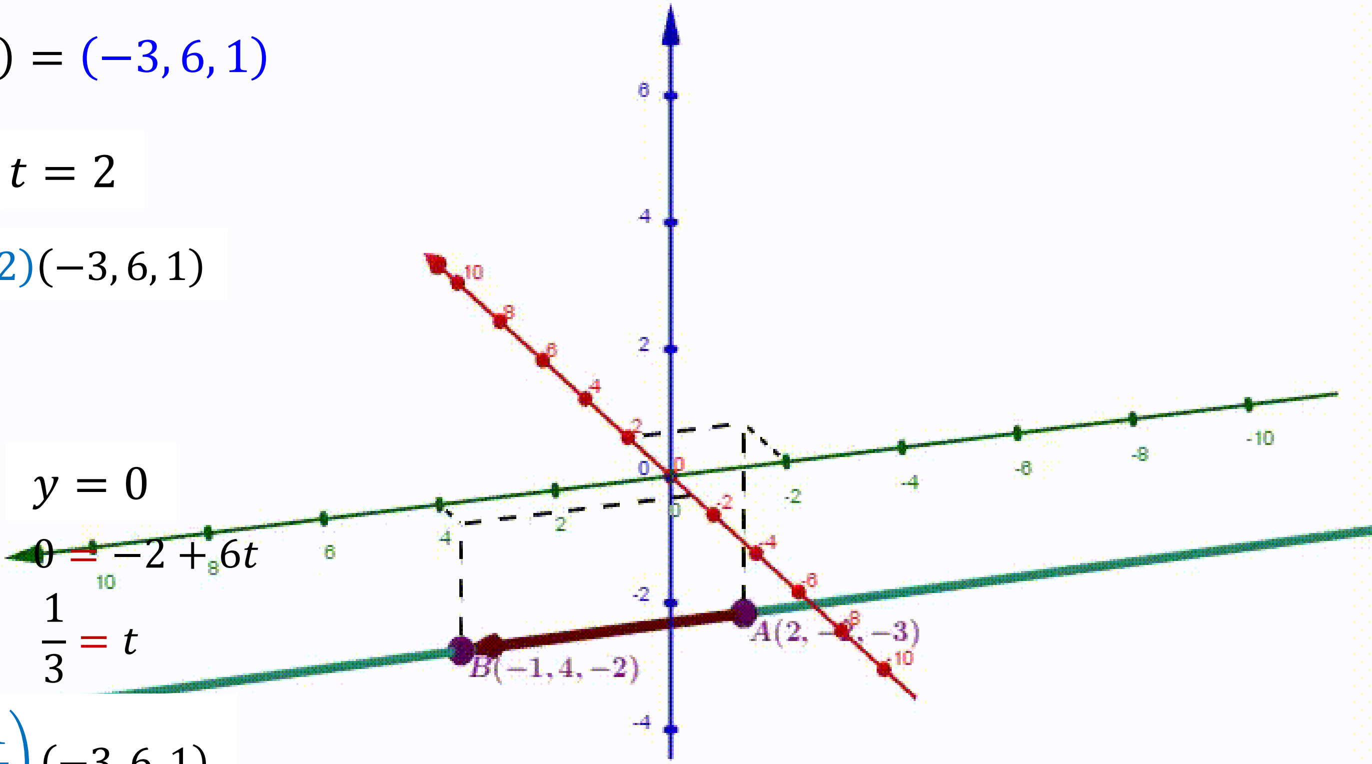
Como $L \cap XZ \Longrightarrow y = 0$

$$0 = -2 + 6t$$

$$\frac{1}{3} = t$$

$$P = (2,-2,-3) + \left(\frac{1}{3}\right)(-3,6,1)$$

$$L \cap XZ = \left(1, 0, -\frac{8}{3}\right)$$

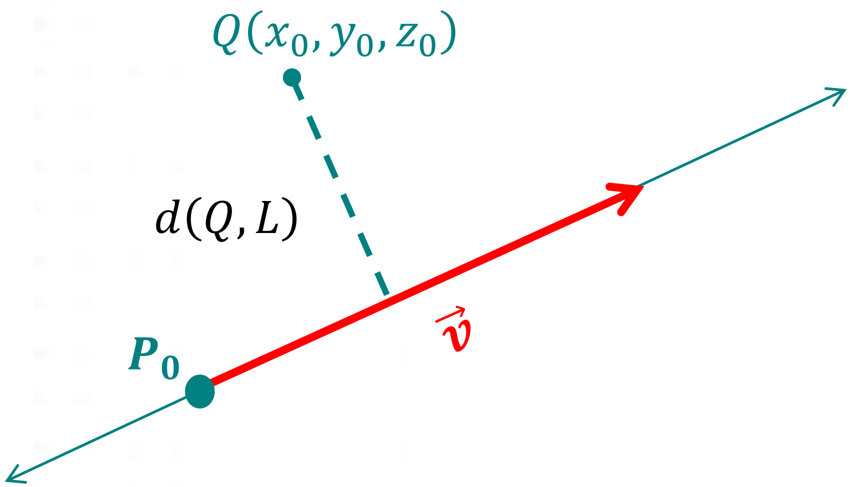


Universidad Tecnológica del Perú

II. Distancia de un Punto a una Recta en el Espacio

La distancia de un punto $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}) \in \mathbb{R}^3$ *a la recta* $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{t\vec{v}}$ *se determina:*

$$d\,(Q, L) = \sqrt{\left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2}$$



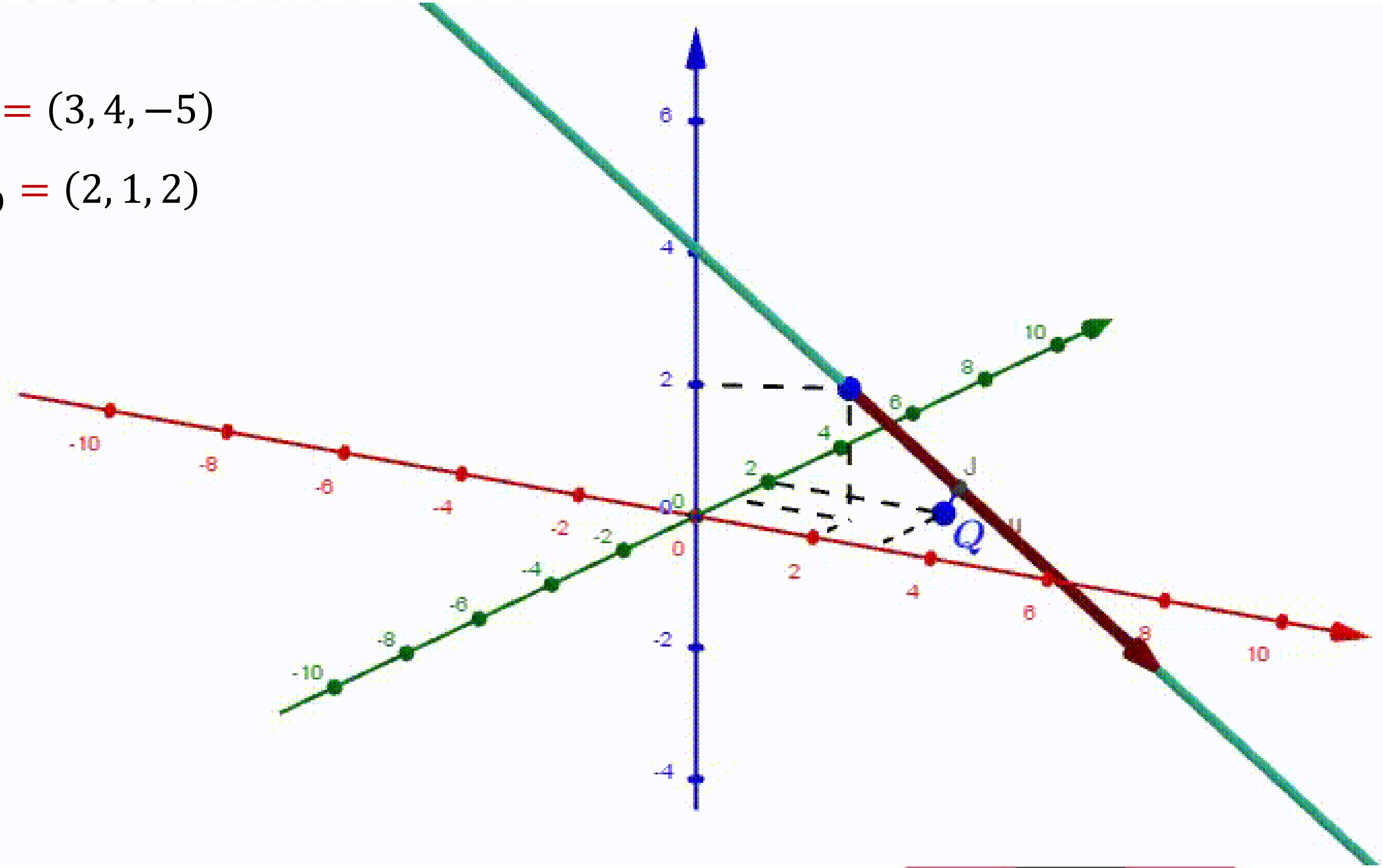
Ejemplo. *Hallar la distancia desde el punto* $\boldsymbol{Q(3,2,0)} \in \mathbb{R}^3$ *a la recta* $\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{3}} = \frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{2-z}}{\boldsymbol{5}}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-5}$$

$\vec{v} = (3,4,-5)$

$P_0 = (2,1,2)$



$$\overrightarrow{P_0Q} = (3,2,0) - (2,1,2) = (1,1,-2)$$

$$\|\overrightarrow{P_0Q}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{v} = (1,1,-2) \cdot (3,4,-5)$$

$$= 3 + 4 + 10 = 17$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$d(Q,L) = \sqrt{\sqrt{6}^2 - \left(\frac{17}{\sqrt{50}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6 - \frac{17^2}{50}} = \frac{\sqrt{22}}{10}$$

RPTA: $d(Q,L) = \frac{\sqrt{22}}{10}$

Universidad Tecnológica del Perú

III. RECTAS PARALELAS

Dadas las rectas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}_1$; $L_2: P = P_2 + t\vec{v}_2$ ***ambas son paralelas si sus vectores directores lo son****, es decir:*

$$\boldsymbol{L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2}$$

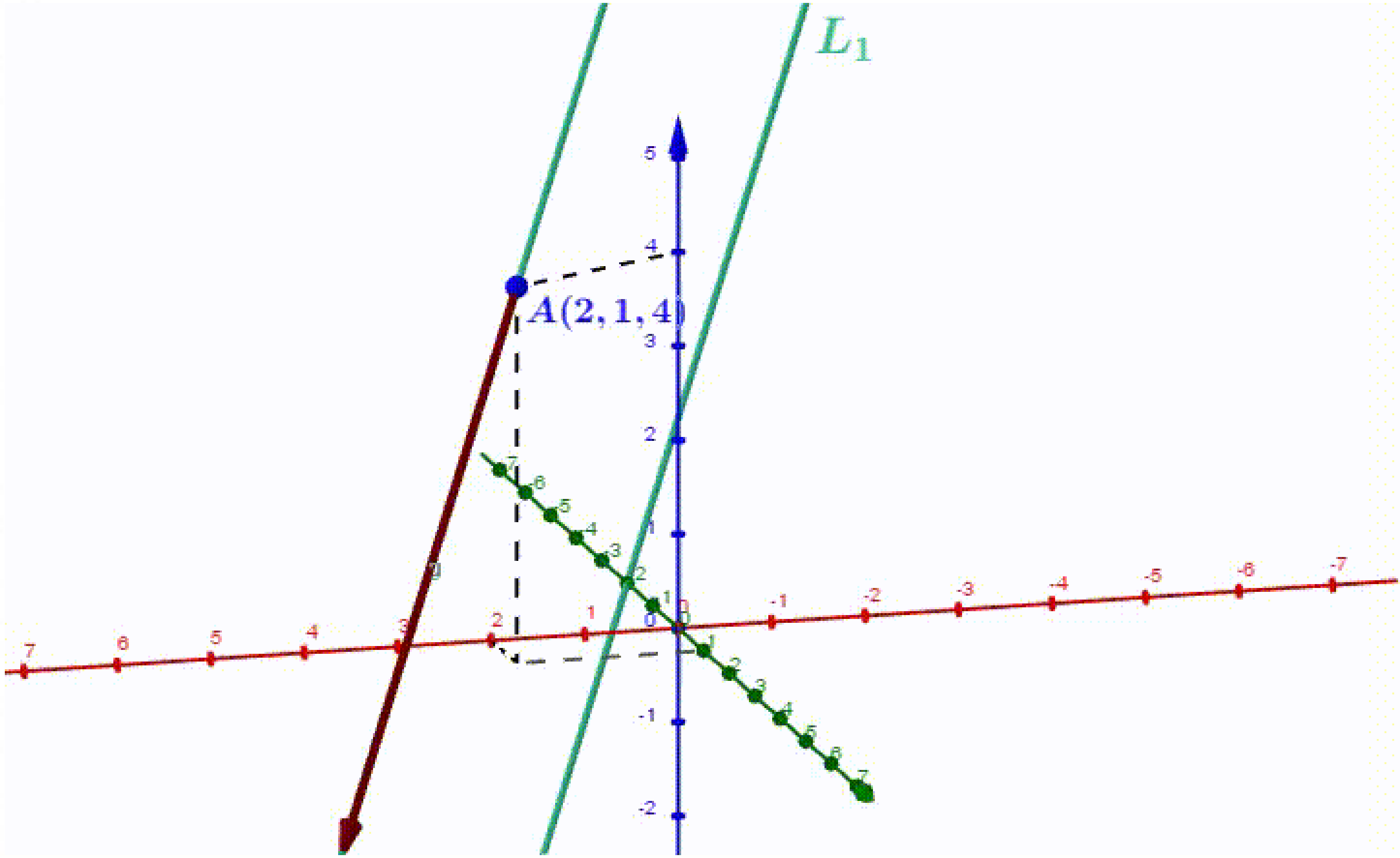
Ejemplo.

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $A(2,1,4)$ *y es paralela* $L_1: x = 3t$; $y = -2 + 4t$; $z = -5t$

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = (3,4,-5)$$

RPTA: $$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-5}$$



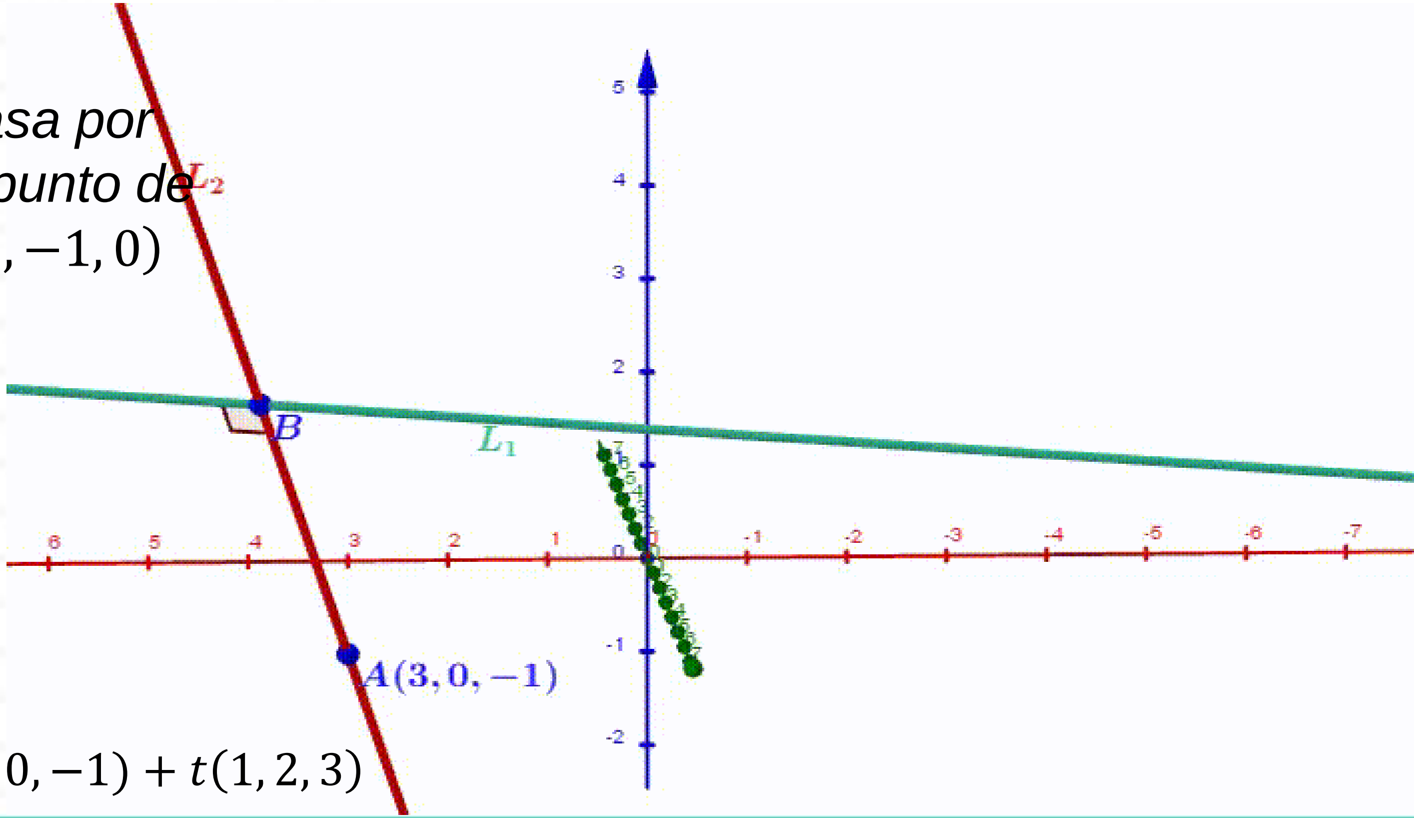
IV. RECTAS ORTOGONALES

Dadas las rectas $L_1: P = P_1 + t\vec{v}_1$; $L_2: P = P_2 + t\vec{v}_2$ ***ambas son ortogonales si sus vectores directores lo son****, es decir:*

$$\boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2} \qquad \boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0}$$

Ejemplo.

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(3,0,-1)$ *y es perpendicular en su punto de intersección con la recta* $L_1: P = (2,3,2) + t(2,-1,0)$



SOLUCIÓN:

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB} = (2t-1, 3-t, 3)$$

$$(2,-1,0)\cdot(2t-1,3-t,3) = 0$$

$$4t - 2 - 3 + t = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \vec{v}_2 = (1,2,3)$$

RPTA: $L_2: P = (3,0,-1) + t(1,2,3)$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Hallar todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,0,2)$ y $B\left(-1,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ y encuentre otros dos puntos.

SOLUCIÓN:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(-2,\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (-6,1,-4)$$

$Ec.Vectorial$: $\quad P = (1,0,2) + t(-6,1,-4)$

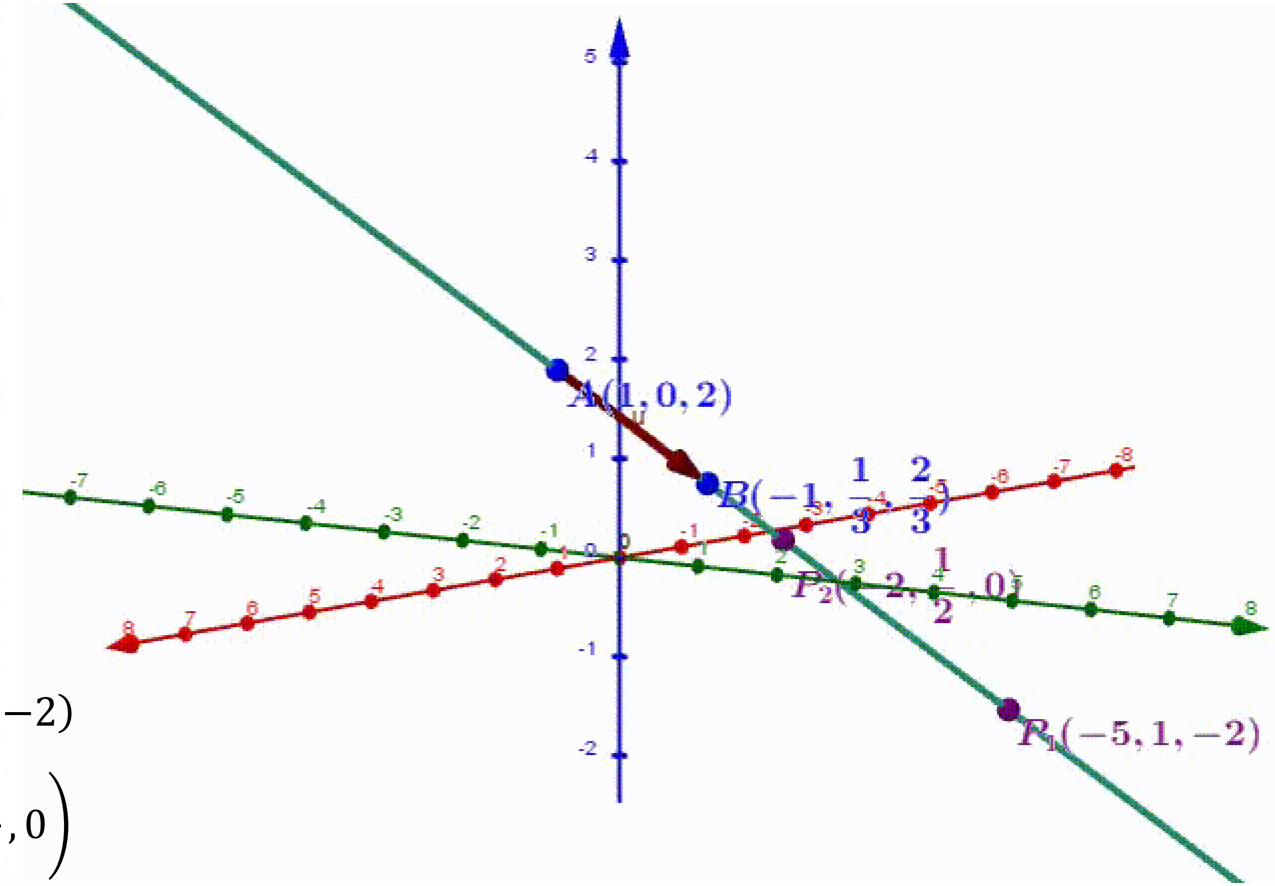
$Ec.Paramétrica$: $\begin{cases} x = 1-6t \\ y = t \\ z = 2-4t \end{cases}$

$Ec.Simétrica$: $\quad \dfrac{x-1}{-6} = y = \dfrac{z-2}{-4}$

$t \in \mathcal{R} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1-6t \\ y = t \\ z = 2-4t \end{cases}$

$t = 1 \qquad P_1(-5,1,-2)$

$t = \dfrac{1}{2} \qquad P_2\left(-2,\dfrac{1}{2},0\right)$



EJERCICIOS EXPLICATIVOS

2. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $T(-1,-2,0\ )$ que es perpendicular a $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{5-z}{4}$ en el espacio y corta a $L_2: x = -2\ ;\ y - 1 = \frac{z+2}{2}$

SOLUCIÓN:

$$L_2: \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

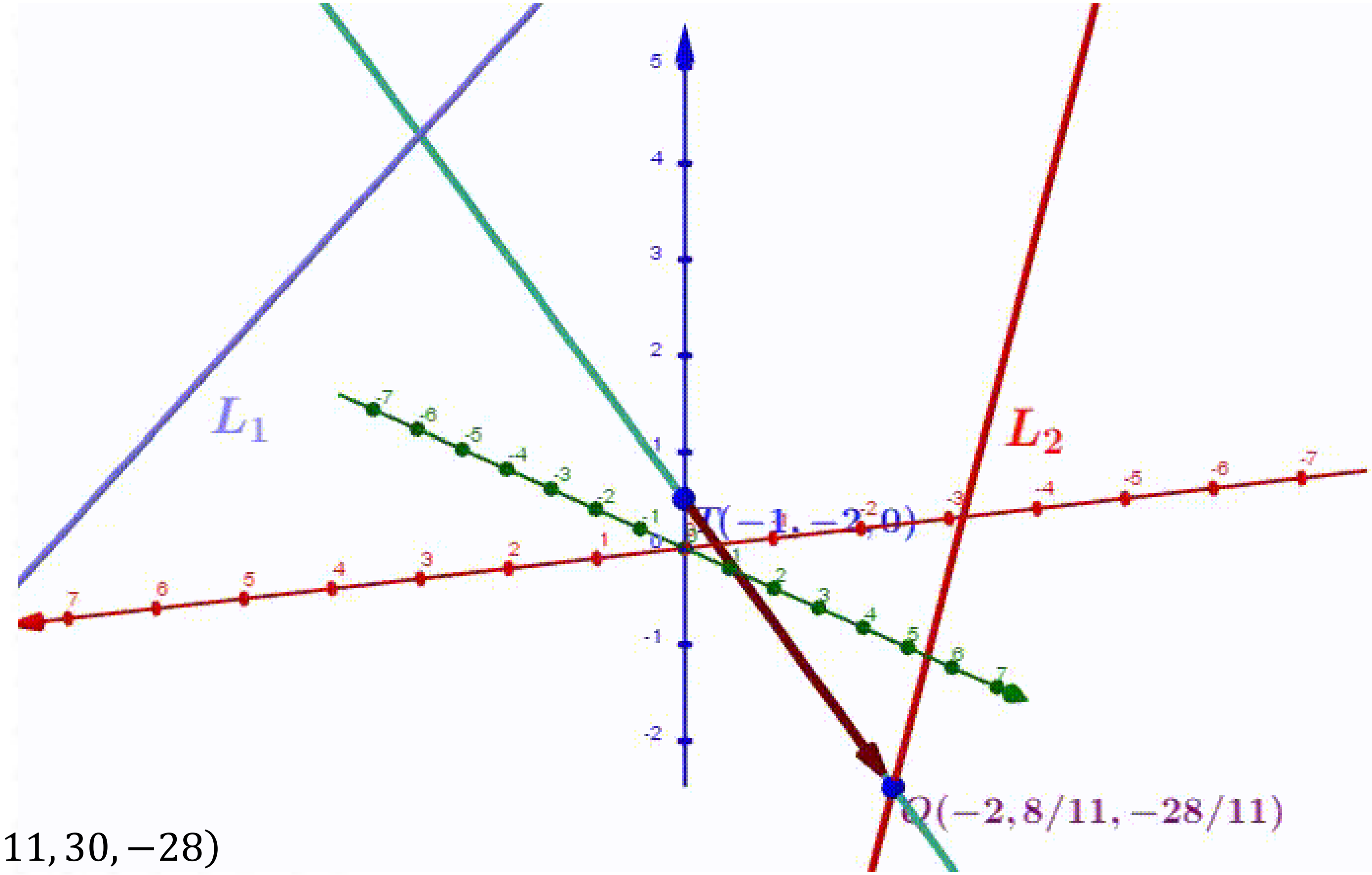
$$\overrightarrow{TQ} = (-1, t+3, 2t-2)$$

$$\overrightarrow{TQ} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$(-1, t+3, 2t-2) \cdot (2,-3,-4) = 0$$

$$-2 - 3t - 9 - 8t + 8 = 0$$

$$t = -\frac{3}{11} \Rightarrow \overrightarrow{TQ} = \left(-1, \frac{30}{11}, -\frac{28}{11}\right)$$



RPTA: $L_2: P = (-1,-2,0\ ) + s(-11,30,-28)$

LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS

Experiencia Grupal

Desarrollar los ejercicios en equipos

Equipos de 5 estudiantes

Tiempo : 20 min

EJERCICIOS RETOS

1. Determine la ecuación vectorial y paramétrica de la recta que pasa por el punto $(0, 14, -10)$ y es paralela a la recta $L\colon x = -1 + 2t\ ;\ \ y = 6 - 3t\ ;\ \ z = 3 + 9t$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,0,-1)$ y es perpendicular. En su punto de intersección con la recta $L_1 = \{(2,3,2) + t(2,-1,0), t \in \mathbb{R}\}$.

3. Dadas las siguientes rectas L_1 que pasa por $A(3;\ 2;\ 1)$ y $(-1\ ;\ 2\ ; -1\ )$ y L_2 que pasa por $C\ (2; -2;\ 7)$ y $D\ (5\ ; -2\ ;\ 1\ )$. Determine si las rectas son paralelas u ortogonales.

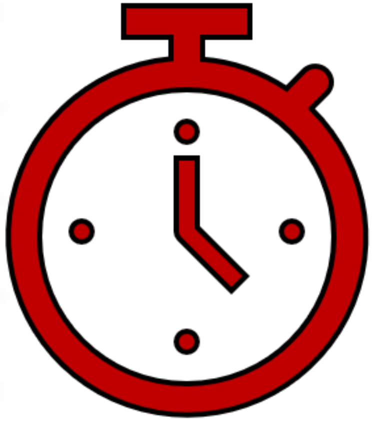
4. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $S(6,0,-3)$ y $T(-6,9,-12)$.

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(0,1,1)$ y corta a las rectas $L_1\colon x = y; 2x = z$ y $L_2 = \{(1,-2,0) + s(1,2,1), s \in \mathbb{R}\}$.

Universidad Tecnológica del Perú

Espacio de Preguntas

Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. Comparte tus dudas de la sesión o de los ejercicios y problemas que acaban de trabajar en los grupos. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 10 min

Universidad Tecnológica del Perú

Conclusiones

1. Los elementos importantes para una recta son: un punto de paso y un vector director.

2. Las rectas paralelas pueden tener el mismo vector director.

3. Las rectas perpendiculares tienen vectores directores perpendiculares donde su producto escalar es cero.

La Recta en $\mathcal{R}^3$

Lo logré

3 FINALMENTE

Excelente tu participación

Recuerda que, siempre parece imposible, hasta que se hace.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

👍

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

UTP

Universidad
Tecnológica
del Perú