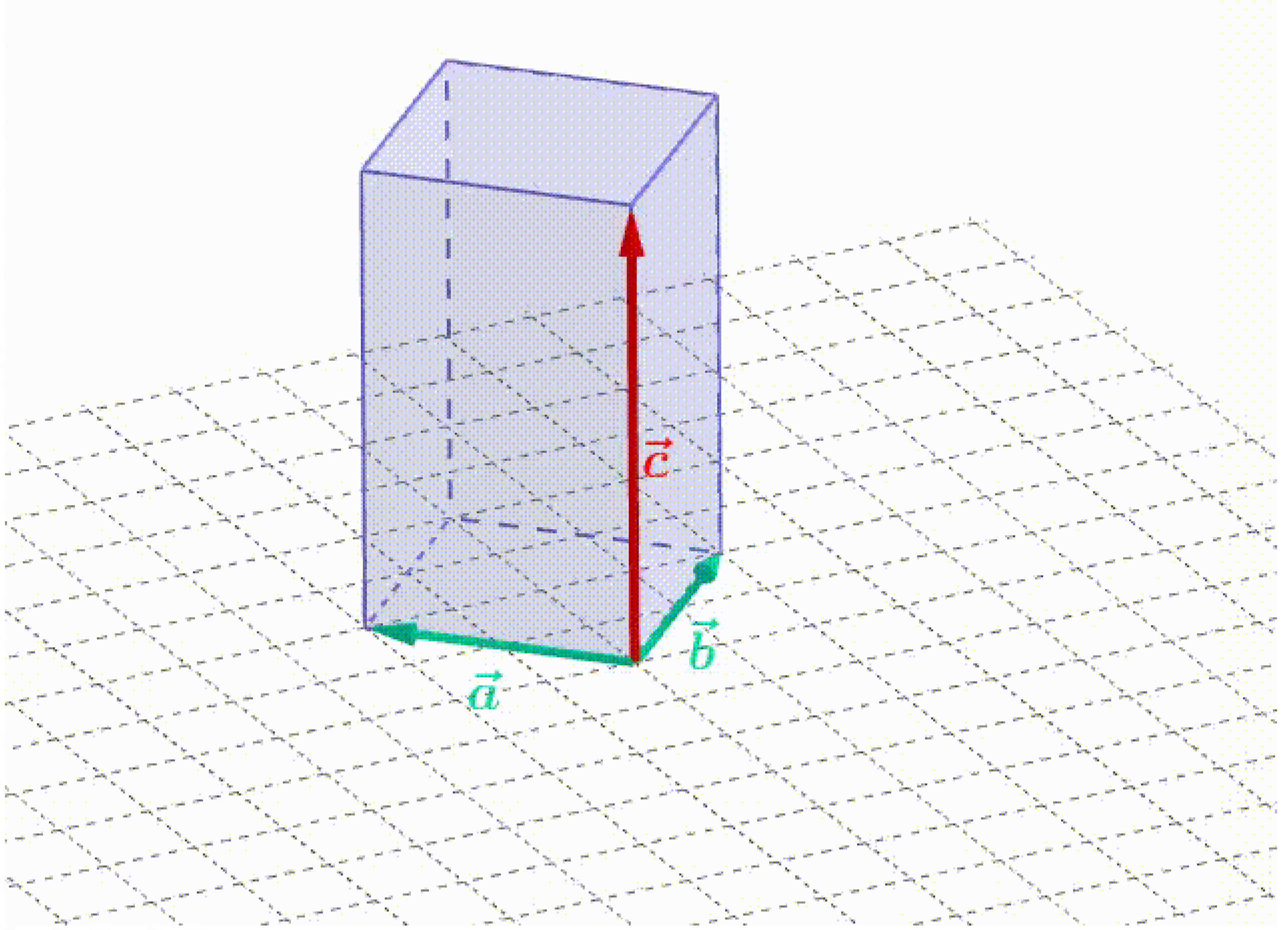
ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

PRODUCTO VECTORIAL

UTP Universidad Tecnológica del Perú

¿Cuál es la utilidad del Producto Vectorial?

El cálculo vectorial no solo favorece a la presentación de ecuaciones de un modelo matemático, físico y problemas geométricos, sino ayuda en la formación de imágenes mentales de conceptos físicos y geométricos. E incluso podemos calcular áreas y el volumen de un solido formado por tres vectores no coplanares.



LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica los conceptos de producto vectorial y triple producto escalar y vectorial en situaciones de contexto.

ESPACIO VECTORIAL EN $\mathcal{R}^3$

PRODUCTO VECTORIAL

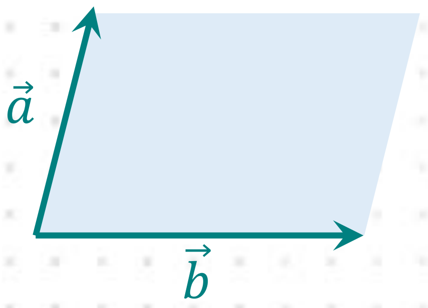
PRODUCTO MIXTO

Desaprende lo que te limita

1 APLICACIONES DE PRODUCTO VECTORIAL

PARALELOGRAMO:

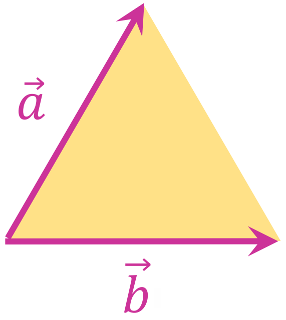
El área de un paralelogramo mediante el producto vectorial está definido por:



$$A = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$$

TRIÁNGULO:

El área de un triángulo (que es la mitad del área del paralelogramo) mediante el producto vectorial está definido por:

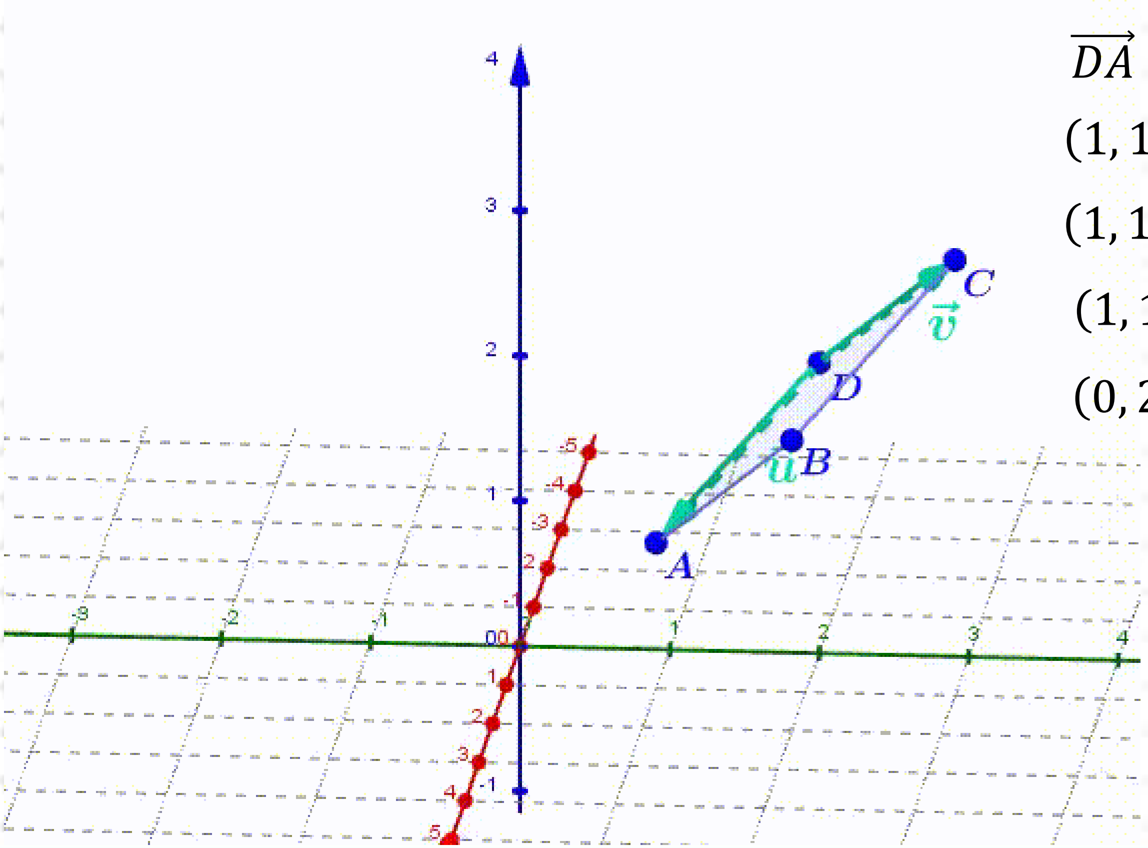


$$A = \frac{1}{2} \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$$

Ejemplo. *Los puntos* $A=(1,1,1)$; $B=(2,2,2)$; $C=(1,3,3)$ *son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice y calcula el área.*

Universidad Tecnológica del Perú

SOLUCIÓN:



$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$$

$$(1,1,1)-D=(2,2,2)-(1,3,3)$$

$$(1,1,1)-D=(1,-1,-1)$$

$$(1,1,1)-(1,-1,-1)=D$$

$$(0,2,2)=D$$

$$\vec{u}=\overrightarrow{DA}=(1,-1,-1)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{DC}=(1,1,1)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}+ & - & +\end{array}\\ \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\end{array}=(0,-2,2)$$

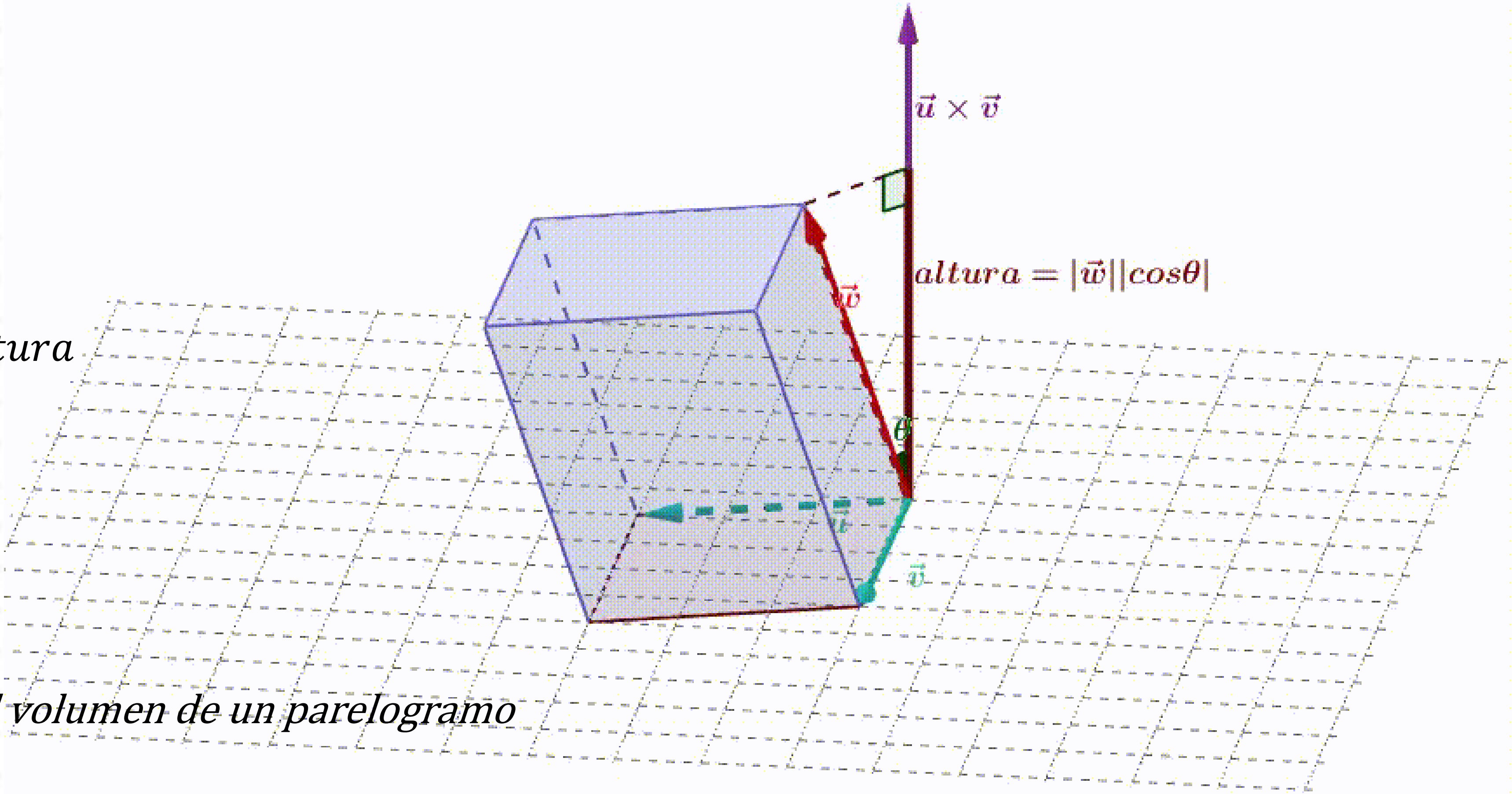
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}$$

RPTA: $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=2\sqrt{2}\,u^2$

2 APLICACIONES AL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Volumen de un Paralelepípedo:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$



$$Volumen = \text{Área de base} * Altura$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}||\cos\theta|$$

$$= (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$$

El número $|(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}|$ *es el volumen de un parelogramo*

Ejemplo. *Determina el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas a:*

$$\vec{A} = (1,3,0)\ ;\vec{B} = (-3,1,0)\ \ y\ \ \vec{C} = (1,1,4).$$

SOLUCIÓN:

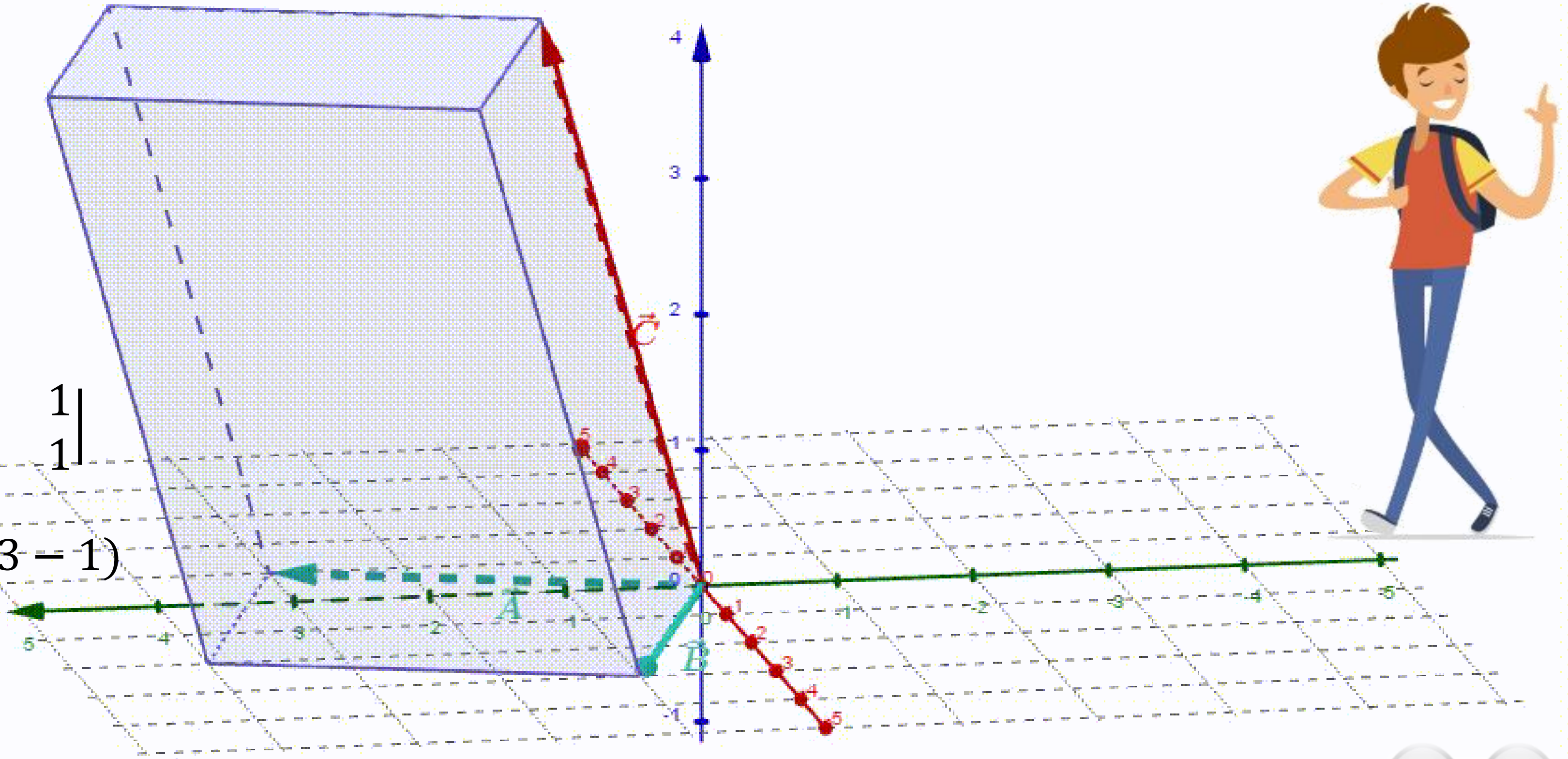
Volumen = $[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]$

$$\begin{array}{c} \quad + \quad - \quad + \\ = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4-0) - 3(-12-0) + 0(-3-1)$$

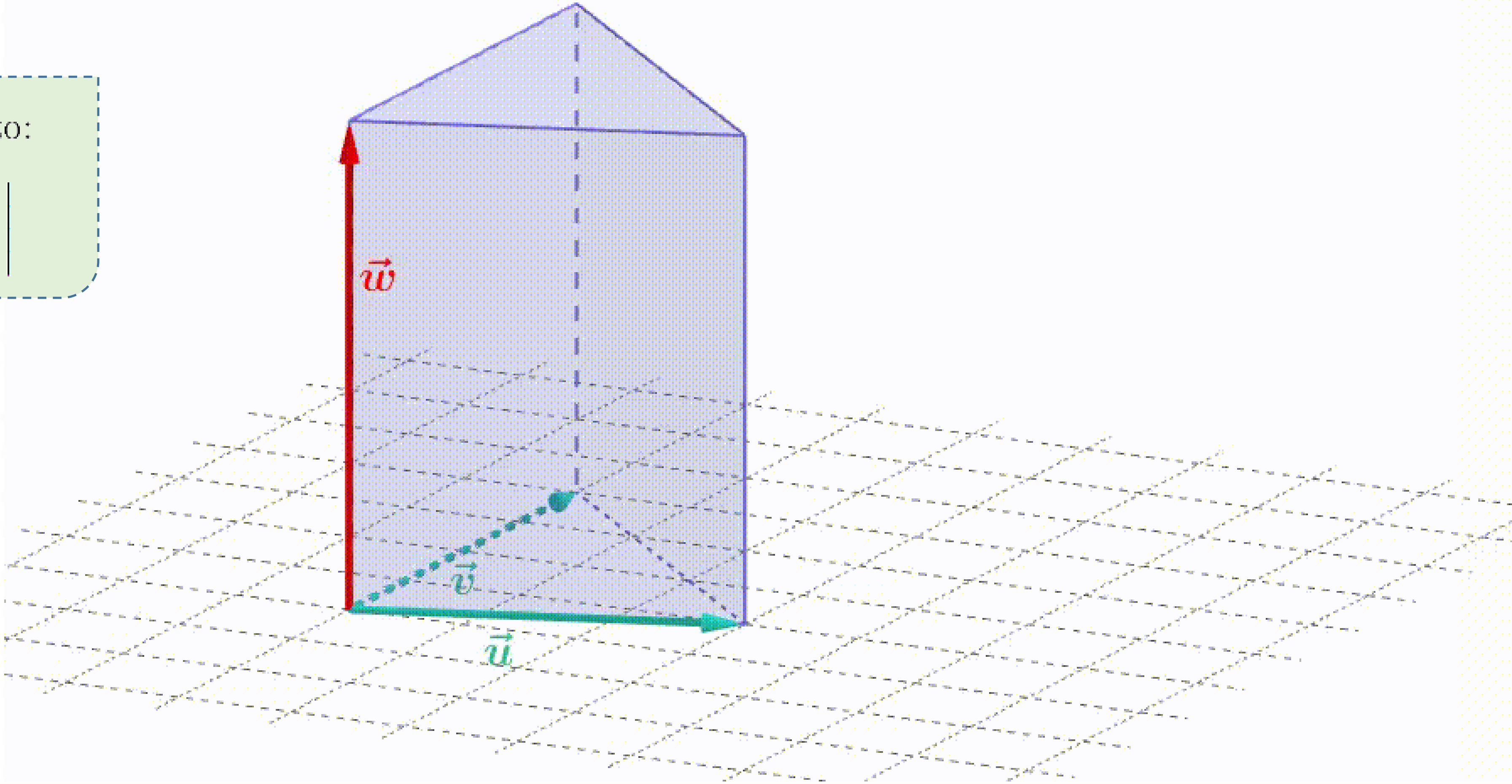
RPTA: $Volumen = 40\ u^3$



2 APLICACIONES AL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Volumen de un Prisma Recto:

$$V = \left| \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}{2} \right|$$



Ejemplo. *Determina el volumen del prisma que tiene como aristas a:*

$$\vec{A} = (1,3,0)\ ;\vec{B} = (-3,1,0)\ \ y\ \ \vec{C} = (1,1,4).$$

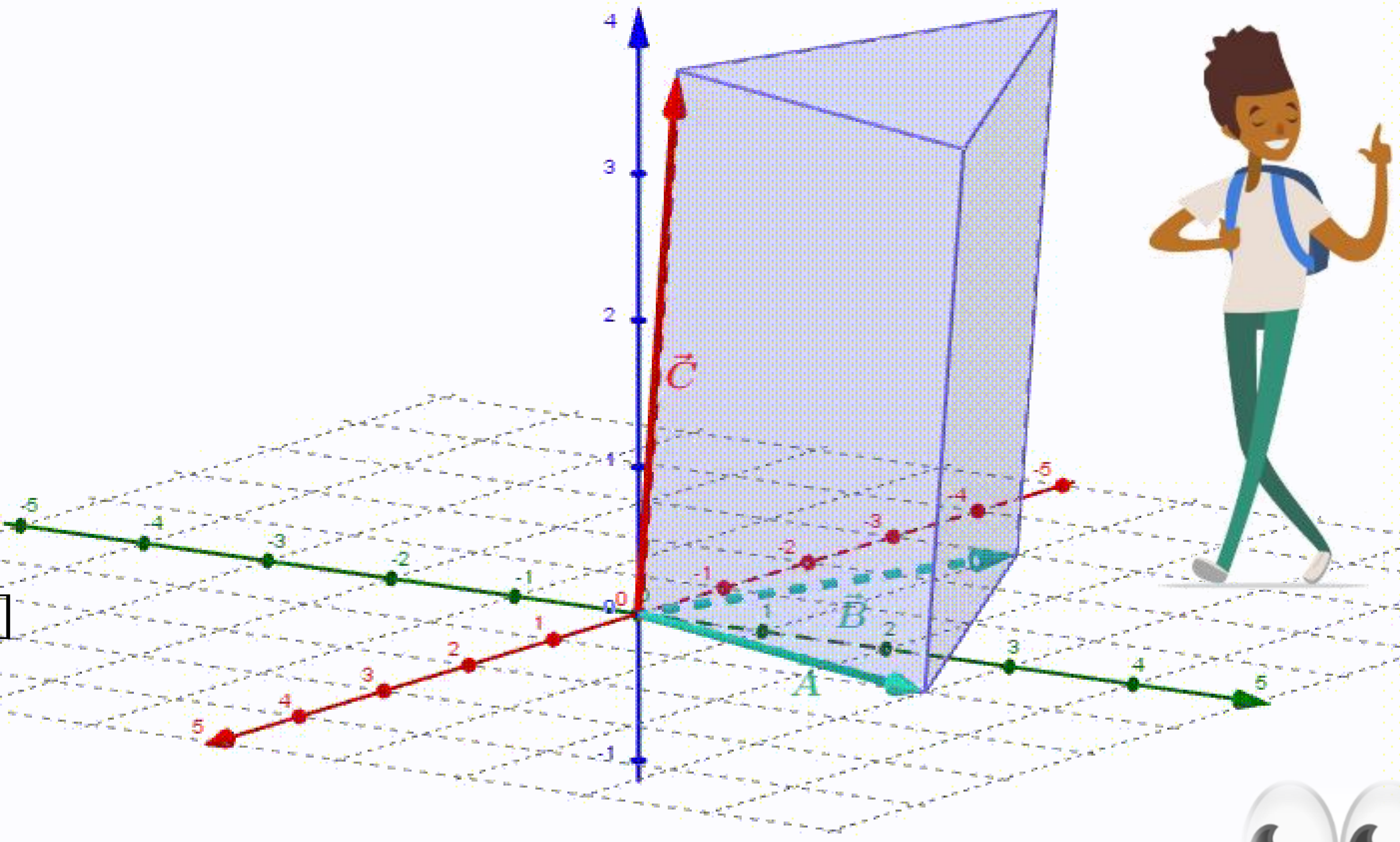
SOLUCIÓN:

Volumen = $\frac{1}{2}\left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right]$

$$\begin{array}{c} \\ = \frac{1}{2}\end{array}\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \multicolumn{3}{c}{\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right|}\end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(4-0) - 3(-12-0) + 0(-3-1)]$$

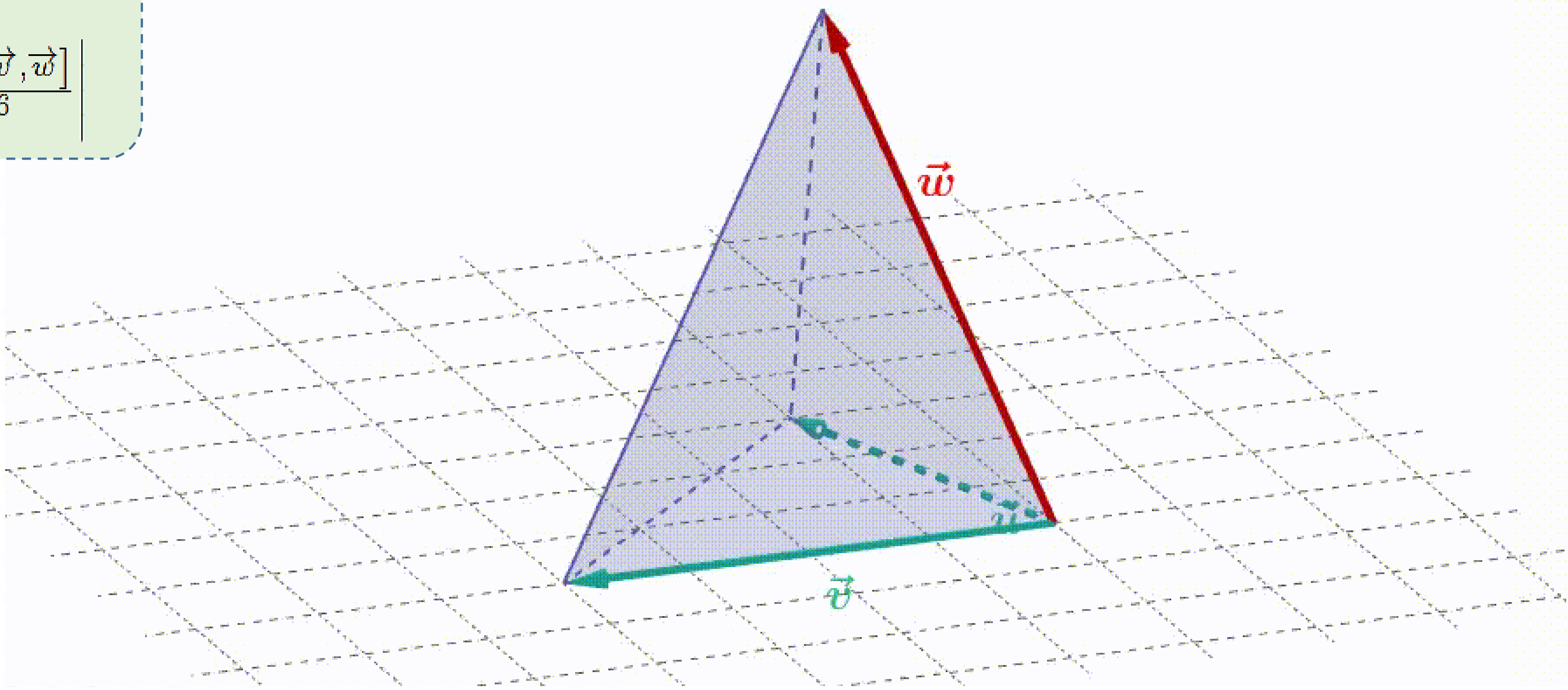


RPTA: $Volumen = 20\ u^3$

2 APLICACIONES AL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Volumen de un Tetraedro:

$$V = \left| \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}{6} \right|$$



Ejemplo. *Determina el volumen de la pirámide que tiene como aristas a:*

$$\vec{A} = (1,3,0)\ ;\vec{B} = (-3,1,0)\ \ y\ \ \vec{C} = (1,1,4).$$

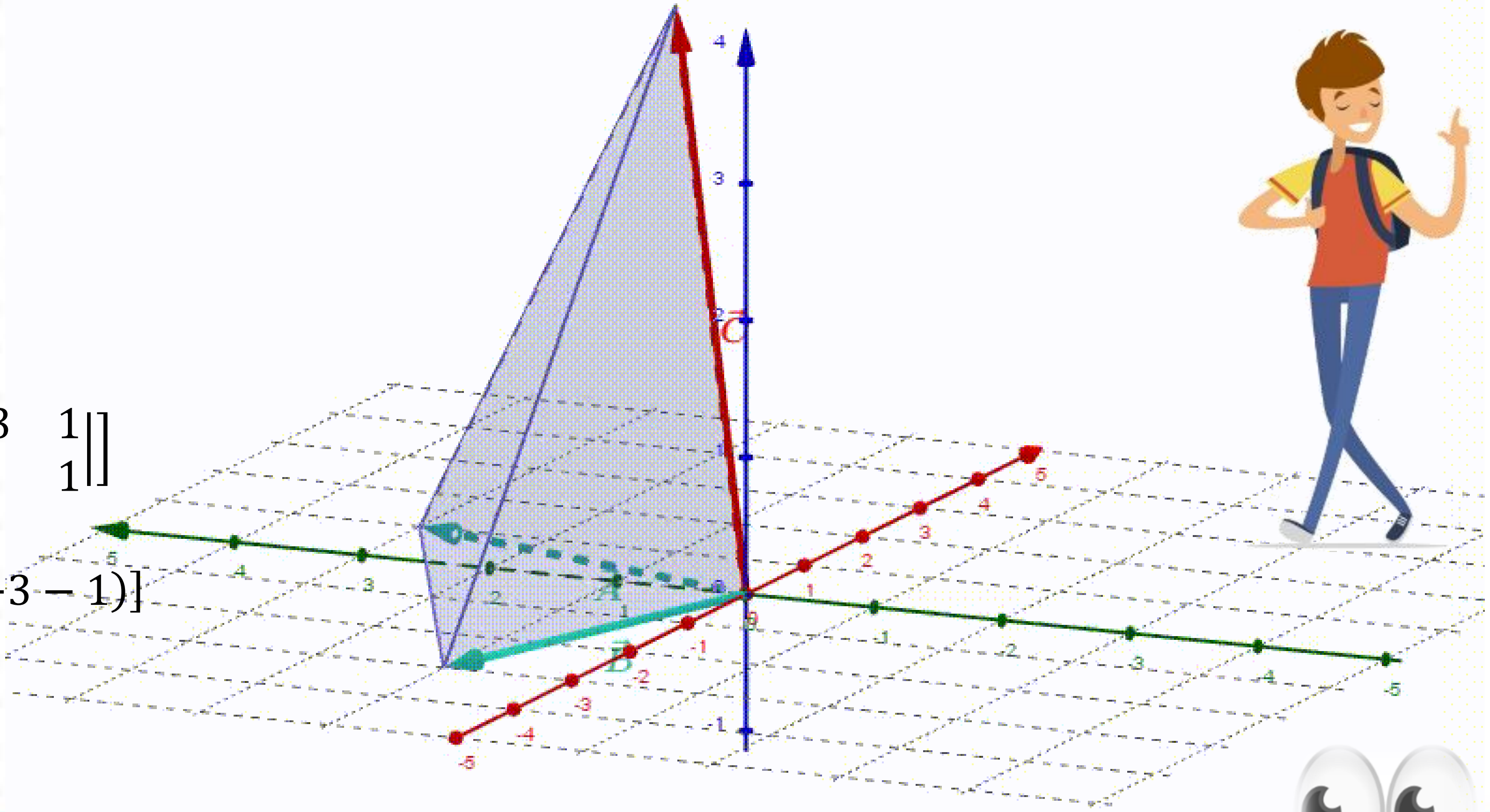
SOLUCIÓN:

Volumen = $\frac{1}{6}\left[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\right]$

$$= \frac{1}{6}\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\left[1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[(4-0) - 3(-12-0) + 0(-3-1)]$$



RPTA: $Volumen = 6.7\ u^3$

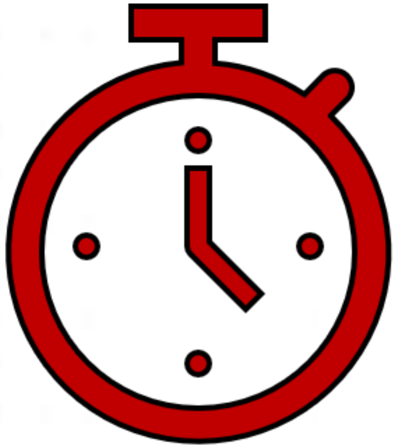
LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS

Universidad Tecnológica del Perú

Experiencia Grupal

Desarrollar los ejercicios en equipos

Equipos de 5 estudiantes



Tiempo : 20 min

Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIOS RETOS

1. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ortogonales. Si $||\vec{a}|| = \sqrt{3}$ y $\|\vec{b}\| = \sqrt{12}$. Determine el valor de el área del paralelogramo formado por los vectores $2\vec{a} - 3\vec{b}$ y $3\vec{a} + \vec{b}$.

2. Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en $A(-2,3-1)$, $B(1,2,3)$ y $C(3,-1,2)$.

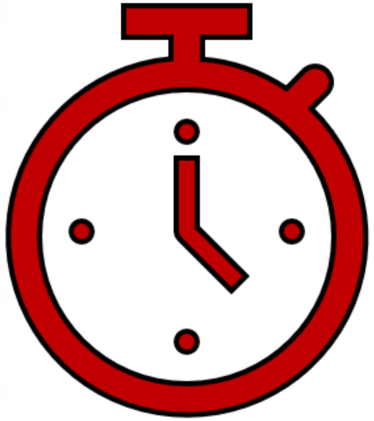
3. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son: $\vec{c} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{d} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

4. Hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores en $\vec{a} = (-2,3,-1)$,$\vec{b} = (1,2,3)$ y $\vec{c} = (3,-1,2)$.

5. Hallar el volumen de la pirámide formado por los vectores en $\vec{a} = (-1,3,0)$,$\vec{b} = (1,2,0)$ y $\vec{c} = (3,-1,4)$.

Espacio de Preguntas

Pregunta a través del chat o levantando la mano en el Zoom. Comparte tus dudas de la sesión o de los ejercicios y problemas que acaban de trabajar en los grupos. Si no tienes preguntas el profesor realizará algunas



Tiempo : 10 min

UTP Universidad Tecnológica del Perú

Conclusiones

1. Si dos vectores son paralelos entonces su producto vectorial en igual al vector nulo.
2. Podemos encontrar en área y volúmenes con el producto vectorial.
3. Si tres vectores son coplanares entonces su triple producto escalar es cero.
4. En tres vectores no coplanares el triple producto escalar es diferente de cero y representa el volumen del paralelepípedo que forman.
5. No importa el orden de los vectores para el triple producto escalar si queremos hallar el volumen que forman dichos vectores

Producto Vectorial R^3

Lo logré

FINALMENTE

Excelente tu participación

Siempre hay un nuevo reto para mantenerme motivado.
UTP

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú